

FUNZIONI GONIOMETRICHE O CIRCOLARI

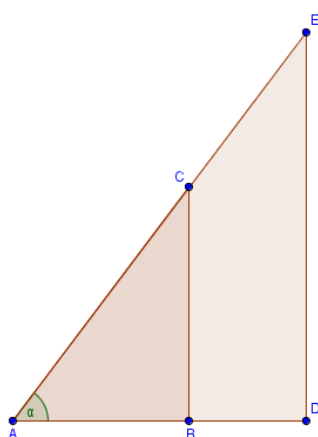
CLASSE III B

Prof. Erasmo Modica

erasmo@galois.it

www.galois.it

DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE



Consideriamo un triangolo rettangolo ABC , rettangolo in B e sia α l'angolo acuto di vertice A . Successivamente, consideriamo una retta parallela al cateto BC e siano D ed E , rispettivamente, i punti in cui tale retta interseca il prolungamento del cateto AB e quello dell'ipotenusa AC .

Il triangolo ADE che si viene a formare è anch'esso rettangolo e l'angolo acuto in A misura anch'esso α . Di conseguenza, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° , i due angoli \hat{C} e \hat{E} sono anch'essi congruenti, perché differenza di angoli congruenti.

I due triangoli ABC e ADE sono quindi *simili* tra loro e quindi, hanno i lati opposti agli angoli congruenti, detti **lati omologhi**, in proporzione, cioè:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$$

Da ciò è possibile dedurre che: **in un triangolo rettangolo, il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa e il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo α e l'ipotenusa, non dipendono dalla misura dei lati del triangolo, ma dipendono esclusivamente dal valore di α , ovvero i due rapporti $\frac{BC}{AC}$ e $\frac{AB}{AC}$ dipendono solo dalla misura dell'angolo α .**

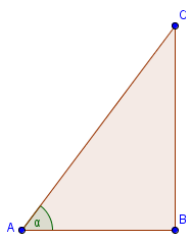
Definizione. Si dice **seno dell'angolo α** , indicato con la scrittura $\sin \alpha$, il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa. In formule:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opposto all'angolo } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

Definizione. Si dice **coseno dell'angolo α** , indicato con la scrittura $\cos \alpha$, il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo α e l'ipotenusa. In formule:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente all'angolo } \alpha}{\text{ipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

Esempio. Determinare le funzioni goniometriche dell'angolo \hat{A} del triangolo ABC , sapendo che $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$ e $\overline{AC} = 13$.

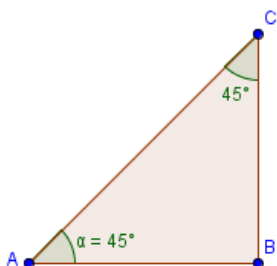


Dalle definizioni precedenti segue che:

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DELL'ANGOLO DI 45°



Consideriamo un triangolo rettangolo ABC , rettangolo in B , avente l'angolo $\alpha = 45^\circ$. Di conseguenza anche l'angolo \hat{C} sarà di 45° . Il triangolo è quindi isoscele, pertanto si ha:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = l$$

Applicando il teorema di Pitagora, ricaviamo che l'ipotenusa misura:

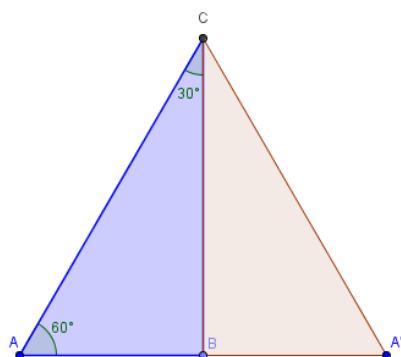
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

Dalle definizioni delle funzioni goniometriche discende che:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE DEGLI ANGOLI DI 30° E DI 60°



Consideriamo un triangolo rettangolo ABC , rettangolo in B , avente l'angolo $\hat{ACB} = 30^\circ$. Di conseguenza l'angolo \hat{BAC} sarà di 60° . Questo triangolo è la metà del triangolo equilatero ACA' e, di conseguenza, se il suo lato $\overline{AC} = l$, il lato $\overline{AB} = \frac{1}{2}l$.

Applicando il teorema di Pitagora, ricaviamo che il cateto CB misura:

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{1}{2}l\sqrt{3}$$

Dalle definizioni delle funzioni goniometriche discende che:

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{2}l}{l} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86$$

$$\sin 60^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{1}{2}l}{l} = \frac{1}{2} = 0,5$$

TAVOLA RIASSUNTIVA

Angolo α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0°	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,86$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
180°	0	-1