

straordinaria 2010

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Indirizzo: ordinamento

CORSO DI ORDINAMENTO

Sessione straordinaria 2010

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un triangolo ABC , l'angolo \hat{B} è doppio dell'angolo \hat{C} e inoltre è $BC = a$

1. Dette BH e CL , rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C , si consideri il rapporto:

$$\frac{BH^2 + CL^2}{a^2}$$

espresso in funzione di $x = \hat{A}$.

2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1. Si verifichi che la curva che la rappresenta è simmetrica rispetto all'origine.
2. Si studi tale funzione e se ne tracci il grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .
3. Si verifichi che $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log|x^2 - 1|$ è una funzione primitiva di $f(x)$.
4. Si calcoli l'errore che si commette approssimando l'area racchiusa dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette $x = 2$ e $x = 3$ con l'area del trapezio $ABCD$, essendo $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, f(3))$ e $D(2, f(2))$.

QUESTIONARIO

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15° . Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, quale è la distanza tra i due osservatori (non tenedo conto dell'ostacolo grattacielo)?
2. Si calcoli il limite della funzione $(1 + tgx)^{ctgx}$ quando x tende a 0.
3. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?
4. Si dimostri che ogni funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dove a, b, c, d sono valori reali con $a \neq 0$, ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.
5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x del triangolo di vertici $A(2, 2)$, $B(6, 4)$, $C(6, 6)$
6. Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:
$$2 + 2^x = \text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x + 6\text{sen}^2 x \text{cos}^2 x$$
7. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$. Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.
8. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di n lati, inscritto in una circonferenza di raggio r , quando si fa tendere n all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.
9. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \text{cos}^3 x$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
10. Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.

Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.