suppletiva 2010
Corso di Ordinamento

PROBLEMA 1

Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che AB = BC.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo AÔB = x , la quantità:

   $$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

   controllando che risulti:

   $$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8$$
2. Si studi la funzione f(x) e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$
4. Si calcoli il valore medio della funzione f(x) nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di *f(x)* e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

suppletiva 2010
Corso di Ordinamento

QUESTIONARIO

1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2. Considerata la funzione $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove *a* è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$.

3. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è *r* e l'altezza *2r*, e una sfera di raggio *r*. A quale distanza *x* dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

6. Si determinino *a* e *b* in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate (1,4) e (3,8) .

7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l*. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche x = 2t e $y = \frac{2}{t^2 + 1}$ nel suo punto di coordinate (2,1) .

9. Si dimostri che se una funzione f(x) è derivabile nel punto x_0 , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.