Liceo della comunicazione suppletiva 2010

PROBLEMA 1

In un sistema di assi cartesiani ortogonali O x y una curva γ ha per equazione

$$y = \frac{3(x-1)^2}{ax^2 + bx + c}.$$

1. Si calcolino i valori delle costanti reali a, b, c, sapendo che γ ha per asintoti le rette di equazioni y = 3 e x = -2 , e passa per il punto (3, 12/5).

2. Si studi la funzione così ottenuta e si disegni il relativo grafico.

3. L'equazione di γ può porsi sotto la forma:
$$y = 3 + \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}.$$
   Si determinino le costanti α e β

4. Si calcoli l'area della superficie piana, finita, delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette x = 4 e x = k , essendo k l'ascissa del punto in cui la curva incontra l'asintoto orizzontale.

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1. Si determini il dominio di *f(x)* e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.

2. Si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico γ.

3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.

4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinchè il suo volume sia massimo.

Liceo della comunicazione suppletiva 2010

QUESTIONARIO

1. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \frac{\sqrt{2sen(2x) - \sqrt{3}}}{\log \cos x}, \text{ con } 0 \le x \le 2\pi .$$

2. Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, quando x tende a 1^+.

3. Si provi che le due funzioni $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = -sen^2 x$ hanno le derivate uguali e se ne dia una giustificazione.

4. Un rettangolo ABCD è tale che risulta $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 1$.

   Si determini il triangolo isoscele di area minima circoscritto al rettangolo e tale che la base contenga il segmento AB.

5. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = x^2 - x^3$ e dall'asse delle x.

6. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

7. Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove *a* è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

8. Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è *r* e l'altezza *2r,* e una sfera di raggio *r.* A quale distanza *x* dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale ß, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

9. Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

10. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \le x \le 2$.