**Matematica e-Learning - Corso Zero di Matematica**

# I Radicali

*Prof. Erasmo Modica*

erasmo@galois.it

A.A. 2009/2010

# 1 I numeri naturali

# 2 Le radici

Abbiamo visto che l'insieme dei numeri reali è costituito da tutti e soli i numeri che possono essere rappresentati in forma decimale. Si ha:

- $a \in \mathbb{R}$ è un numero razionale se la parte decimale è finita o periodica;
- $a \in \mathbb{R}$ è un numero irrazionale se la parte decimale è infinita e non periodica.

## 2.1 Le radici quadrate

**Definizione 2.1.** *Si dicono* **radici quadrate** [1] *di un numero reale a tutti quei numeri che, elevati al quadrato, danno come risultato a.*

**Osservazione 2.1.**

Lo 0 ha come unica radice quadrata se stesso!

***Perché i numeri reali negativi non ammettono alcuna radice quadrata?***

[1] Il termine radice quadrata deriva dal fatto che $\sqrt{a}$ esprime il lato di un quadrato di area a.

La risposta alla domanda è semplice, basti pensare al fatto che qualsiasi numero reale elevato al quadrato dà come risultato un numero positivo!

**Notazione**: Il simbolo utilizzato per indicare la radice quadrata di un numero è $\sqrt{s}$ [2], ma in realtà esso indica solamente il valore assoluto delle radici quadrate del numero, cioè:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Per tale ragione il simbolo suddetto prende il nome di ***radice quadrata assoluta***.

Bisogna quindi stare attenti e ricordare che nell'insieme dei numeri reali:

- ogni numero positivo $a$ ammette due radici quadrate opposte tra loro: $\pm\sqrt{a}$,
- lo zero ammette come unica radice quadrata se stesso,
- i numeri negativi non ammettono alcuna radice quadrata.

Dalle precedenti considerazioni appare evidente che di fronte alla $\sqrt{a}$, si deve avere:

- $a \geq 0$, perché i numeri reali negativi non ammettono radice quadrata;
- $\sqrt{a} \geq 0$, perché il simbolo $\sqrt{a}$ rappresenta la radice quadrata assoluta.

Quando ci si trova di fronte alla radice quadrata di un numero reale a si possono verificare i due casi seguenti:

- il numero $a$ è un *quadrato perfetto* e quindi la sua radice quadrata assoluta è un numero intero: ad esempio $\sqrt{4} = 2$;
- il numero $a$ non è un quadrato perfetto e quindi la sua radice quadrata assoluta è un numero irrazionale: ad esempio $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

Concludiamo questo paragrafo osservando che, se si considerano i soli numeri reali non negativi, la radice quadrata assoluta o ***aritmetica*** è l'operazione inversa dell'elevazione al quadrato:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

[2] Simbolo introdotto dal matematico tedesco *Christoph Rudolff (1550-1545)* come abbreviazione della parola *radix*.

## 2.2 Le radici cubiche

**Definizione 2.2.** *Si dice* **radice cubica** [3] *di un numero reale a, quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato a.*

Si osserva facilmente che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto sappiamo che il cubo di un numero reale conserva sempre lo stesso segno della base.

**Esempio 2.1.**

- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt[3]{125} = 5$
- $\sqrt[3]{0} = 0$

Quando ci si trova di fronte alla radice cubica di un numero reale $a$ si possono verificare i due casi seguenti:

- il numero $a$ è un *cubo perfetto* e quindi la sua radice cubica è un numero intero;
- il numero $a$ non è un cubo perfetto e quindi la sua radice cubica è un numero irrazionale.

## 2.3 Le radici n-me

**Definizione 2.3.** *Si dicono* **radici n-me** *di un numero reale a quei numeri che, elevato ad n, danno come risultato a:*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Lavorando con le radici *n-me* di un numero reale, è necessario far attenzione all'indice della radice che può essere pari o dispari. Si possono presentare infatti i seguenti casi:

- se l'indice $n$ è <u>dispari</u> la radice $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, inoltre è negativa se $a < 0$, positiva se $a > 0$ e nulla se $a = 0$;
- se l'indice $n$ è <u>pari</u> la radice $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di $a \geq 0$ e si ha che $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

[3] Il termine radice cubica deriva dal fatto che $\sqrt[3]{v}$ esprime il lato di un cubo di volume $v$.

**Definizione 2.4.** *Siano $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, si chiama* ***radice aritmetica n-esima*** *di $\alpha$ e si indica con $\sqrt[n]{\alpha}$ l'unico numero reale e positivo $\beta$ tale che $\beta^n = \alpha$. Se $\alpha = 0$ si pone, di conseguenza, $\beta = 0$ (ovvero 0 ha come unica radice* n-esima *se stesso).*

Si ritiene utile ribadire i concetti precedentemente discussi mediante le seguenti osservazioni.

**Osservazione 2.2.**

1. Se $n = 2$ si parla di radice quadrata e la scrittura $\sqrt{a}$ indica tutti quei numeri reali che, elevati al quadrato, danno come risultato $a$. Ogni numero positivo $a$ ammette due radici quadrate opposte tra loro: $\pm\sqrt{a}$, infatti: $(-\sqrt{a}) \cdot (-\sqrt{a}) = a$ e $(+\sqrt{a}) \cdot (+\sqrt{a}) = a$;
2. $\sqrt[0]{0} = 0$
3. $\sqrt{-4}$ non esiste perché **non esistono le radici n-esime di numeri negativi quando n è pari**.
4. $\sqrt[3]{-8} = -2$ perché la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero, in quanto sappiamo che il cubo di un numero reale conserva sempre lo stesso segno della base, ma si può generalizzare e dire che **esistono le radici n-esime di numeri negativi quando n è dispari**.

**Osservazione 2.3.**

**Attenzione**! Se si calcola la radice aritmetica di $a^2$ poiché $a^2 \geq 0$ la scrittura ha significato ma non sappiamo a priori se $a$ è positivo o negativo, quindi è un errore scrivere:

$$\sqrt{a^2} = a$$

È invece corretto scrivere:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Se si considerano i soli numeri reali non negativi, la radice quadrata assoluta o aritmetica è l'operazione inversa dell'elevazione al quadrato:

$$\sqrt{a^2} = a$$

In questo caso non si ricorre al valore assoluto perché la scrittura ha significato se $a \geq 0$ e quindi il quadrato della radice aritmetica di un numero positivo è il numero stesso.

## 2.4 Potenze a esponente razionale

### 2.4.1 Esponente positivo

L'obiettivo che ci si pone in questo paragrafo è quello di scrivere la radice *n-esima* di un numero reale $a \geq 0$ sotto forma di potenza di $a$, vogliamo cioè che sia:

$$\sqrt[n]{a} = a^x$$

Elevando ambo i membri dell'uguaglianza a $n$ otteniamo:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right) = (a^x)^n \quad \Rightarrow \quad a = a^{n \cdot x}$$

Trattandosi di due potenze con base $a \geq 0$ uguali tra loro, tale uguaglianza è resa possibile solo dall'uguaglianza dei due esponenti, cioè deve essere:

$$1 = nx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}$$

Possiamo quindi scrivere che:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

relazione valida anche nel caso in cui $a = 0$.

Consideriamo un numero intero positivo $m$ e scriviamo:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

quindi si ha che:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

**Esempio 2.2.** *Calcolare* $27^{\frac{2}{3}}$.

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$$

### 2.4.2 Esponente negativo

Per poter definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione $a \neq 0$, infatti:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

**Esempio 2.3.** *Calcolare* $27^{-\frac{2}{3}}$.

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

**Definizione 2.5.** *Si dice* ***potenza a esponente razionale*** *di un numero reale positivo a l'espressione:*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \textit{con} \quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

***Perché abbiamo dovuto escludere dalla definizione il caso*** $a < 0$***?***

Partiamo dall'espressione:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Se $n$ è dispari, la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base; se $n$ è pari, $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per $a \geq 0$.
Considerando il numero $m \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

**Quest'ultima uguaglianza è falsa se** $a < 0$!

Infatti consideriamo:

$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^{\frac{1}{6}}\right]^6 = \left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$, in cui $\sqrt[6]{-2}$ non è definita in $\mathbb{R}$.
$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^6\right]^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}}$.

Si nota che in un caso perveniamo ad un risultato mentre nell'altro no.

Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni, ovvero una regola di precedenza:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

## 2.5 Operazioni con le radici

| | |
|---|---|
| ***Proprietà invariantiva*** | $\sqrt[nt]{a^{mt}} = \sqrt[n]{a^m}$, con $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ |
| ***Moltiplicazione di radici con lo stesso indice*** | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ |
| ***Divisione di radici con lo stesso indice*** | $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ |
| ***Potenza di radici*** | $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ |
| ***Radice di radice*** | $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ |
| ***Moltiplicazione di radici con lo stesso radicando*** | $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$ |
| ***Divisione di radici con lo stesso radicando*** | $\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}$ |
| ***Riduzione di radici allo stesso indice*** | $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[q]{b} = \sqrt[nq]{a^q} \cdot \sqrt[nq]{b^n}$ |

### 2.5.1 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

*Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra due radici aventi lo stesso radicando basta trasformarle sotto forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.*

**Esempio 2.4.** *Eseguire la moltiplicazione* $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$.

$$\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{3^9}$$

**Esempio 2.5.** *Eseguire la divisione* $\sqrt[5]{3} : \sqrt[4]{3}$.

$$\sqrt[5]{3} : \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{5}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt[20]{3}}$$

### 2.5.2 Riduzione di più radicali allo stesso indice

*Per ridurre due o più radicali allo stesso indice è necessario portarli ad un indice comune, detto* **minimo comune multiplo degli indici***, utilizzando la proprietà invariantiva.*

**Esempio 2.6.** *Ridurre i radicali* $\sqrt[5]{3}$ *e* $\sqrt[4]{2}$ *allo stesso indice.*

Il minimo comune indice è 20, quindi si ha:

- $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{4}{20}} = \left(3^{\frac{1}{20}}\right)^4 = \sqrt[20]{3^4}$
- $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{20}} = \left(2^{\frac{1}{20}}\right)^5 = \sqrt[20]{2^5}$

# 3 I radicali

**Definizione 3.1.** *Si dice **radicale** un'espressione del tipo $a \cdot \sqrt[n]{b}$, con $a$ e $b$ numeri reali, $b \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Il numero $a$ prende il nome di **coefficiente** del radicale.*

Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

Si tratta con ***radicali aritmetici*** se la radice n-esima è una radice aritmetica, altrimenti si tratterà con ***radicali algebrici***.

**Definizione 3.2.** *Due radicali si dicono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.*

## 3.1 Operazioni con i radicali

Restano valide tutte le operazioni elencate per le radici n-esime.
<u>È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili</u>:

$$\sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{2} = (1+2) \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$$

Infatti la somma $\sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[5]{2}$ non si può scrivere come unico radicale perché l'<u>indice</u> è diverso; invece la somma $\sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{3}$ non si può scrivere come unico radicale perché è diverso il <u>radicando</u>.

Invece si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo aver ridotti i radicali allo stesso indice:

$$3\sqrt[3]{2} \cdot 7\sqrt[5]{3} = 3\,\sqrt[15]{2^5} \cdot 7\,\sqrt[15]{3^3} = 21\,\sqrt[15]{2^5 \cdot 3^3} = 21\,\sqrt[15]{864}$$

$$3\sqrt[3]{2} : 7\sqrt[5]{3} = 3\,\sqrt[15]{2^5} : 7\,\sqrt[15]{3^3} = 21\,\sqrt[15]{\frac{2^5}{3^3}} = 21\,\sqrt[15]{\frac{32}{27}}$$

## 3.2 Portare dentro il segno di radice

*Per **portare dentro** il segno di radice basta elevare il coefficiente del radicale all'indice della radice e lo si riscrive sotto il segno di radice:*

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

**Esempio 3.1.** *Portare il coefficiente del radicale $2\sqrt[3]{5}$ dentro il segno di radice.*

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

## 3.3 Portare fuori dal segno di radice

È possibile ***portare fuori*** dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si parte da:

$$\sqrt[n]{a^m} \quad con \quad m \geq n$$

si divide $m$ per $n$ e si porta fuori il termine $a$ elevato al quoziente della divisione intera, cioè $a^q$, mentre rimane dentro il segno di radice il termine $a$ elevato al resto della divisione intera, cioè $a^r$. Quindi si ha:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r} \quad con \quad m = nq + r$$

**Esempio 3.2.** *Portare fuori dal segno di radice il maggior numero di fattori nell'espressione $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3}$.*

$$\sqrt[3]{a^5b^7cd^3} = ab^2d \cdot \sqrt[3]{a^2bc}$$

## 3.4 Razionalizzazione

***Razionalizzare*** *una frazione vuol dire trasformarla in una frazione equivalente avente a denominatore un numero che non sia un radicale.*

I Caso: *Razionalizzazione della frazione* $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Per razionalizzare una tale frazione basta moltiplicare sia numeratore che denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di *fattore razionalizzante*:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

II Caso: *Razionalizzazione della frazione* $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$

Il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$, quindi si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

<u>III Caso</u>: *Razionalizzazione della frazione* $\frac{a}{\sqrt{b^m} \mp \sqrt{c^n}}$

In questo casi, utilizzando il prodotto notevole $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, si ha:

- $\frac{a}{\sqrt{b^m}-\sqrt{c^n}} = \frac{a\cdot(\sqrt{b^m}+\sqrt{c^n})}{(\sqrt{b^m}-\sqrt{c^n})\cdot(\sqrt{b^m}+\sqrt{c^n})} = \frac{a\cdot(\sqrt{b^m}+\sqrt{c^n})}{b^m-c^n}$
- $\frac{a}{\sqrt{b^m}+\sqrt{c^n}} = \frac{a\cdot(\sqrt{b^m}-\sqrt{c^n})}{(\sqrt{b^m}+\sqrt{c^n})\cdot(\sqrt{b^m}-\sqrt{c^n})} = \frac{a\cdot(\sqrt{b^m}-\sqrt{c^n})}{b^m-c^n}$

<u>IV Caso</u>: *Razionalizzazione della frazione* $\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}}$

Per razionalizzare tale frazione si utilizza l'uguaglianza $x^3 \pm y^3 = (x \pm y) \cdot (x^2 \mp xy + y^2)$ e si ottiene:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{(\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}) \cdot (\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})} = \frac{a \cdot (\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{a \pm b}$$

## 3.5 Radicali doppi

**Definizione 3.3.** *Si dice* ***radicale doppio*** *un'espressione del tipo:*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

**Teorema 3.1.** *: Per i radicali doppi vale la seguente formula di trasformazione:*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

*Dimostrazione.* Elevando al quadrato ambo i membri della precedente formula si ha:

- $\left(\sqrt{a \pm \sqrt{b}}\right)^2 = a \pm \sqrt{b}$

- $\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-b})\cdot(a-\sqrt{a^2-b})}{4}} =$
  $a \pm \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{a^2-b}\right)^2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + b} = a \pm \sqrt{b}$

$\square$

**Osservazione 3.1.**

Questa formula trova un'utile applicazione solo nel caso in cui l'espressione $a^2 - b$ è un quadrato perfetto.

**Esempio 3.3.** *Trasformare il radicale doppio* $\sqrt{7 - \sqrt{40}}$.

Dopo aver osservato che $7^2 - 40 = 49 - 40 = 9 = 3^2$, utilizzando le formule di trasformazione si ottiene:

$$\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$