Matematica e-Learning - Corso Zero di Matematica

Identità ed equazioni

Prof. Erasmo Modica

erasmo@galois.it

A.A. 2009/2010

1 Generalità sulle equazioni

Si consideri un'uguaglianza tra due espressioni algebriche

$$A = B$$

Se si sostituiscono al posto della A e della B dei numeri, si può verificare uno dei tre casi seguenti:

- l'uguaglianza $A = B$ è sempre vera;
- l'uguaglianza $A = B$ è sempre falsa;
- l'uguaglianza $A = B$ risulta vera solo per alcuni numeri e falsa per altri.

Se lo scopo è quello di determinare quali valori numerici si devono attribuire ad A e B affinché l'uguaglianza $A = B$ risulti vera, si dice che quest'ultima uguaglianza è un'equazione.

Definizione 1.1. *Si dice* ***equazione*** *un'uguaglianza tra due espressioni algebriche per la quale si vogliono determinare i valori delle variabili che la rendono vera. Le variabili che compaiono in un'equazione prendono il nome di* ***incognite*** *e si indicano con le lettere finali dell'alfabeto* $x, y, z, \ldots$

La forma generale di un'equazione è:

$$A(x) = B(x)$$

l'espressione $A(x)$ si dice **primo membro** dell'equazione, mentre l'espressione $B(x)$ si dice **secondo membro**.

Definizione 1.2. *Si dice* ***soluzione*** *o* ***radice*** *di un'equazione quel numero che, sostituito al posto della variabile, realizza l'uguaglianza.*

In base al tipo di soluzione trovata, le equazioni vengono classificate come indicato nella seguente tabella.

Classificazione	**Insieme delle soluzioni**	**Esempio**
Possibile (nell'insieme A)	$S \neq \emptyset$	$2x = 4$ in $\mathbb{N}$
Impossibile (nell'insieme A)	$S = \emptyset$	$x + 2 = 1$ in $\mathbb{N}$
Determinata (nell'insieme A)	$S \subset A$, S *finito*	$x + 3x = 24$ in $\mathbb{Q}$
Indeterminata (nell'insieme A)	$S \subseteq A$, S *infinito*	$x + 3x = 4x$ in $\mathbb{R}$

Definizione 1.3. *Due equazioni si dicono* **equivalenti** *se ammettono le stesse soluzioni.*

Esempio 1.1. *:*

Le equazioni $2x = 1$ e $6x = 3$ sono equivalenti in $\mathbb{Q}$.

I Principio di Equivalenza: *Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita (che sia definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola 1: In ogni equazione un termine si può spostare da un membro all'altro, purché venga cambiato il segno.

Esempio 1.2.

L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $3x - x = -5 - 1$.

Regola 2: Se in ciascun membro di un'equazione compaiono le stesse quantità, queste si possono eliminare.

Esempio 1.3.

L'equazione $3x + 5 + x = x - 1 + 3x - 7$ è equivalente all'equazione $3x - 5 + x = x - 1 + 3x - 5$.

II Principio di Equivalenza: *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, o una stessa* *espressione algebrica contenente l'incognita, che sia definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola 1: Se si cambiano i segni di tutti i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Esempio 1.4.

L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $-3x - 5 = -x + 1$.

Regola 2: Un'equazione con coefficienti frazionari si può trasformare in un'equazione equivalente con i coefficienti interi moltiplicando ciascun membro per il m.c.m. dei denominatori.

Esempio 1.5.

L'equazione $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+1}{6}$ è equivalente all'equazione $2(x-1)-3x = x+1$.

Definizione 1.4. *Si dice **forma normale** di un'equazione la scrittura:*

$$P(x) = 0$$

Definizione 1.5. *Si definisce **grado** di un'equazione, scritta in forma normale, il grado del polinomio $P(x)$.*

2 Equazioni di primo grado

Si vuole adesso risolvere un'equazione di primo grado ad un'incognita, scritta in forma normale, nella sua espressione più generale:

$$ax + b = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
Applicando i principi d'equivalenza, si ottiene l'espressione

$$ax = -b$$

e quindi si possono presentare i tre casi:

<u>**I Caso**</u> : $a \neq 0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \{-b/a\} \Rightarrow$ **equazione determinata**.

Esempio: $x + 3x = 24 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$

<u>**II Caso**</u> : $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0x = -b \Rightarrow S = \emptyset \Rightarrow$ **equazione impossibile**;

Esempio: $3x + 1 = 3x \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ equazione impossibile.

<u>**III Caso**</u> : $a = 0, b = 0 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R} \Rightarrow$ **equazione indeterminata**.

Esempio: $4x = 3x + x \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ equazione indeterminata.

3 Equazioni fratte

Definizione 3.1. *Un'equazione si dice* ***fratta*** *quando l'incognita compare a denominatore di una frazione, ovvero quando è del tipo:*

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

I valori che annullano il denominatore dell'equazione indicano quali valori le soluzioni non possono assumere e quindi consentono di stabilire quali sono le **condizioni di accettabilità** *delle soluzioni.*

Esempio 3.1. *Risolvere l'equazione* $\frac{5-x}{x+2} = 3$.

Le condizioni di accettabilità si stabiliscono imponendo $x + 2 \neq 0$ e si ottiene $x \neq -2$. Risolviamo adesso l'equazione:

$$\frac{5-x}{x+2} = 3\frac{x+2}{x+2} \Rightarrow 5-x = 3x+6 \Rightarrow -x-3x = 6-5 \Rightarrow -4x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

La soluzione è accettabile in quanto è diversa da -2.

4 Equazioni di secondo grado

Definizione 4.1. *Dicesi* ***equazione di secondo grado****, un'equazione del tipo:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$.

I valori a, b, c *prendono il nome di* ***coefficienti*** *e, in particolare,* c *viene detto* ***termine noto****.*

Un'equazione di secondo grado si definisce:

- ***incompleta pura*** quando il secondo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + c = 0$;
- ***incompleta spuria*** quando il terzo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + bx = 0$;
- ***completa*** quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero e quindi si ha $ax^2 + bx + c = 0$.

4.1 Risoluzione delle equazioni di secondo grado

4.1.1 Equazione incompleta pura ($b = 0$)

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + c = 0$$

e si risolve portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente del termine di grado massimo:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempio 4.1. *Risolvere l'equazione* $4x^2 - 9 = 0$.

Le soluzioni si ottengono come segue:

$$x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{2}$$

Esempio 4.2. *Risolvere l'equazione* $4x^2 + 9 = 0$.

L'equazione non ammette soluzioni in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo e, di conseguenza, la scrittura $x^2 = -\frac{9}{4}$ non è verificata per nessun valore dell'incognita x.

Osservazione 4.1. *:*

Un'equazione incompleta pura ammette soluzioni se, e solo se, i coefficienti a e c sono discordi.

4.1.2 Equazione incompleta spuria $(c = 0)$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

e si risolve mettendo in evidenza la x e utilizzando la legge di annullamento del prodotto. Di conseguenza una soluzione sarà sempre quella nulla.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Esempio 4.3. *Risolvere l'equazione* $2x^2 - 4x = 0$.

Si ha:

$$2x(x - 2) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \vee x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

4.1.3 Equazione completa

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per ricavare la nota formula risolutiva si procede come segue:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 &= b^2 \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\
2ax + b &= \mp\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax &= -b \mp \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

e si è soliti porre $\Delta = b^2 - 4ac$, che prende il nome di ***discriminante*** dell'equazione. Le soluzioni si possono quindi determinare mediante la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si possono quindi presentare tre casi:

<u>I caso</u> : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le ***due soluzioni reali e distinte***:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Esempio 4.4. *Risolvere l'equazione* $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 25 - 24 = 1 \\
x_{1,2} &= \frac{5 \mp 1}{6} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

<u>II caso</u> : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso l'equazione ammette ***due radici reali e coincidenti*** date dall'espressione:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Esempio 4.5. *Risolvere l'equazione* $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$
$$x_1 = x_2 = -\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

III caso : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso l'equazione ***non ammette soluzioni reali***, ma ***soluzioni complesse coniugate***.

Esempio 4.6. *Risolvere l'equazione* $x^2 - x + 3 = 0$.

$$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$$

L'equazione non ammette soluzioni reali.

4.2 Relazione tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nell'ipotesi in cui ammette soluzioni reali distinte (cioè $\Delta > 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

concludiamo che la **somma delle radici** è pari a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

mentre il **prodotto delle radici** è pari a:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Esempio 4.7. *Data l'equazione* $x^2 - 5x + 6 = 0$*, determinare, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Applicando le precedenti formule si ha:

- $x_1 + x_2 = \frac{5}{1} = 5$;
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6$.

4.3 Scomposizione del trinomio di II grado

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c$ ed effettuiamo i seguenti passaggi in cui vengono utilizzare le relazioni trovare nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= \\ = a[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2] &= \\ = a[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2] &= \\ = a[x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)] &= \\ = a(x - x_1)(x - x_2)& \end{aligned}$$

Esempio 4.8. *Dato il trinomio* $x^2 - 5x + 6$*, scomporlo in fattori.*

Applicando la precedente formula si ha: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

4.4 Numeri complessi ed equazioni di II grado

Per risolvere l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, si utilizza la formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

che coinvolge l'estrazione della radica quadrata della quantità $\Delta = b^2 - 4ac$. Si possono quindi presentare, in merito alle radici, i seguenti casi:

- $\Delta > 0$ due radici reali e distinte;
- $\Delta = 0$ due radici reali coincidenti;
- $\Delta < 0$ due radici complesse coniugate.

Esempio 4.9. *Risolvere l'equazione* $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Si ha:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 10 = -9$$

e quindi:

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-9} = 1 \mp 3i \Rightarrow x_1 = 1 - 3i, x_2 = 1 + 3i$$