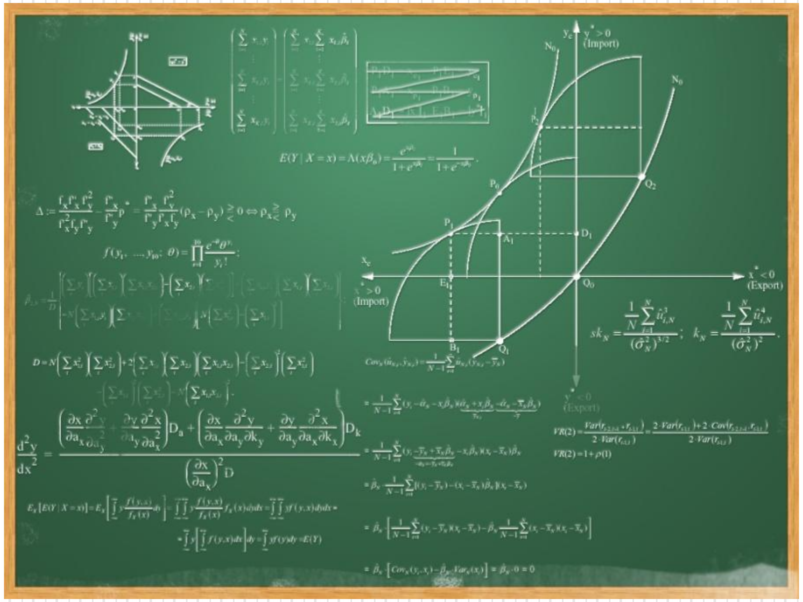
Liceo Classico Statale "Vittorio Emanuele II"

"**Matematica…in analisi**"

Le funzioni



Definizione di funzione

Dati due insiemi A e B, si definisce ***funzione*** una relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

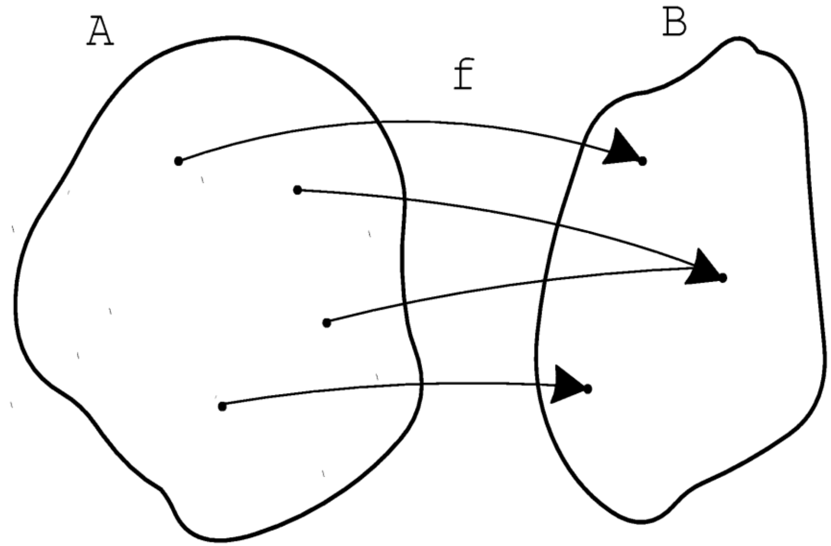
Notazione: Per indicare una generica funzione dall'insieme A all'insieme B, si utilizza la scrittura

$$f: A \to B$$

che viene letta "***effe è una funzione che va da A verso B***".

Inoltre per indicare che l'elemento $b \in B$ è il corrispondente dell'elemento $a \in A$, si utilizza la scrittura:

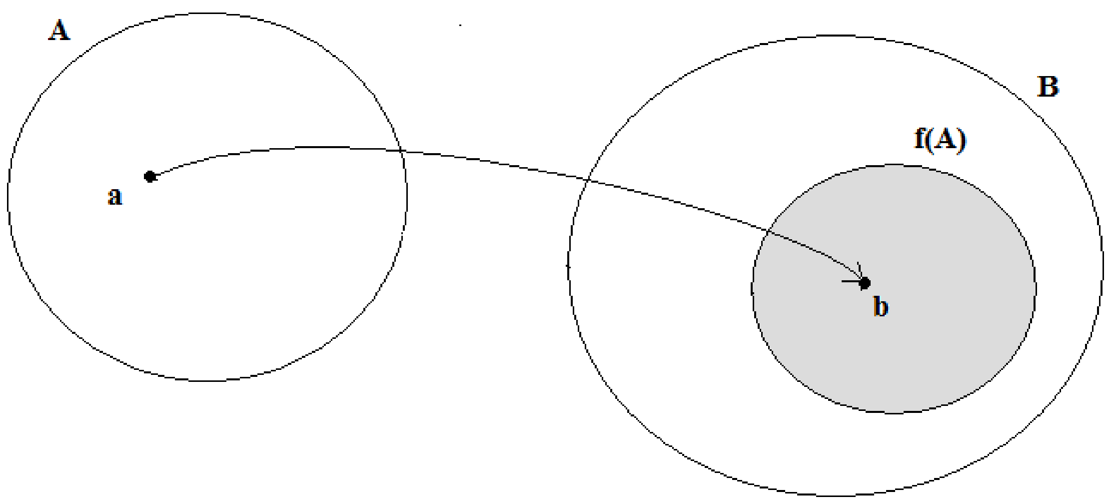
$$b=f(a)$$



Osservazione: Dalla definizione si evince che ad ogni elemento di A deve essere associato un solo elemento di B, ovvero non possono esistere elementi di A che non sono messi in relazione con un elemento di B.

Terminologia

1. L'elemento $b=f(a)$ prende il nome di ***immagine*** dell'elemento b tramite la funzione f.
2. L'elemento a si chiama ***controimmagine*** di b.
3. L'insieme A prende il nome di ***dominio***, o ***insieme di definizione***, o ***insieme di esistenza*** della funzione, mentre l'insieme B prende il nome di ***insieme di arrivo*** della f.
4. L'insieme delle immagini, indicato con $f(A)$ prende il nome di ***codominio*** della funzione.



Modelli

Le funzioni matematiche vengono utilizzate per costruire modelli.

Definizione: *Un **modello** di un fenomeno naturale è una rappresentazione ideale della realtà da studiare che riprende le caratteristiche fondamentali del fenomeno che rappresenta. Tali caratteristiche prendono il nome di **variabili**.*

Le variabili vengono distinte in:

- ***qualitative***, se descrivono una caratteristica o un aspetto del fenomeno;
- ***quantitative***, se possono essere rappresentate mediante un numero reale.

Esempio: Se si considera come fenomeno quello della ***crescita di una pianta***, sono delle variabili *qualitative* l'ombra, la penombra, il pieno sole, etc..; sono invece variabili *quantitative* la luminosità, il livello di crescita, etc.

Costruzione di un modello

Per costruire un modello è necessario seguire i seguenti passi:

1. individuare i fattori cruciali che caratterizzano il fenomeno,
2. individuare le eventuali relazioni tra le grandezze che rappresentano il fenomeno,
3. quantificare le relazioni trovate.

Le basi azotate del DNA

I due filamenti del DNA sono tenuti insieme mediante legami idrogeno tra le coppie di basi azotate adenina, citosina, guanina e timina.

L'*appaiamento complementare* avviene tra le basi:

Adenina – Timina

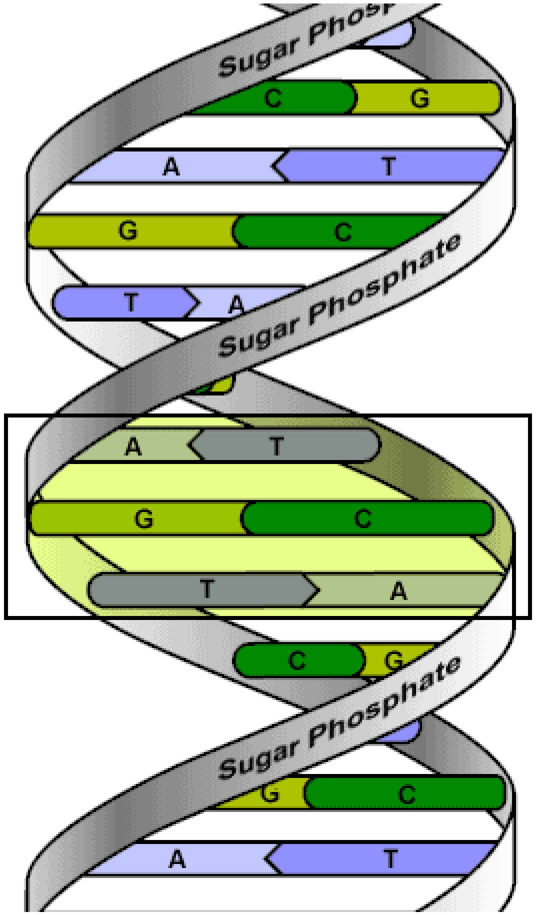
Citosina – Guanina

Esiste quindi una funzione che associa ad ogni base del primo filamento la sua corrispondente nel secondo, ovvero:

$$f(A)=T,\ \ f(C)=G,\ \ f(G)=C,\ \ f(T)=A$$

Se si considerano come dominio e codominio l'insieme delle sequenze di basi azotate, si ha:

$$f(CGGGATGC)=GCCCTACG$$



Funzioni numeriche

<u>**Definizione**</u>: La funzione $f\colon A \to B$ si dice ***numerica*** se gli insiemi A e B sono insiemi numerici.

Se consideriamo come insieme numerico quello dei numeri reali, possiamo parlare di ***funzioni reali di variabile reale*** e quindi dare la seguente definizione:

<u>**Definizione**</u>: Una ***funzione reale di variabile reale*** è una relazione che lega due variabili in modo tale che, assegnati dei valori arbitrari ad una di esse (detta ***variabile indipendente***), restano univocamente determinati i valori dell'altra variabile (detta ***variabile dipendente***).

***Notazioni*:** La variabile indipendente viene solitamente indicata con la lettera x, mentre la variabile dipendente viene indicata con la lettera y. Per evidenziare il fatto che la y dipende dalla x, si utilizza la scrittura:

$$y = f(x)$$

e si legge: "***y è funzione di x***".

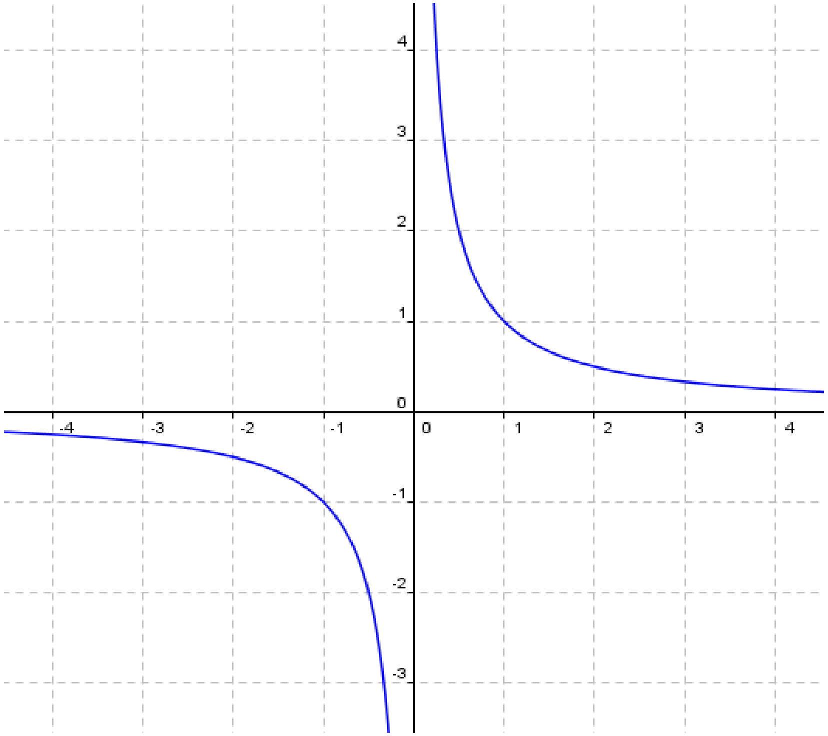
Dominio di una funzione numerica

<u>Definizione</u>

Si definisce ***dominio*** della funzione

$$y=f(x)$$

(e si indica con i simboli D, D_f o *dom f*), l'insieme di tutti i valori reali che si possono attribuire alla variabile x affinché il corrispondente valore della variabile y sia un numero reale.

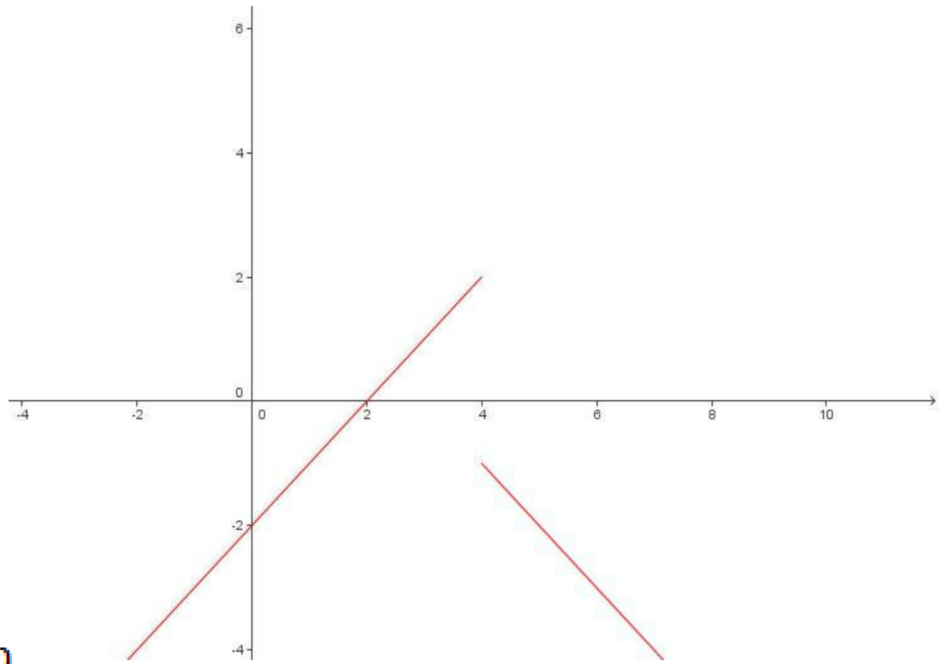


Esempio: Il dominio della funzione $y=1/x$, rappresentata nel grafico, è dato dall'insieme: $\boldsymbol{D=R-\{0\}}$.

Grafico di una funzione numerica

<u>Definizione</u>

Data una funzione di equazione *y=f(x)*, si definisce ***grafico della funzione*** l'insieme di tutti e soli punti del piano cartesiano aventi come ascissa i valori, appartenenti al dominio della variabile indipendente e come ordinata i corrispondenti valori della variabile dipendente:



$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in dom\, f\}$$

Esempio: Quello sopra riportato è il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \geq 4 \\ 3 - x & x < 4 \end{cases}$$

Funzioni uguali

<u>Definizione</u>: Due funzioni reali di variabile reale sono ***uguali*** se hanno lo stesso dominio e la stessa legge matematica che le rappresenta.

Esempio:

Le funzioni:

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ f(x) = x - 1$
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = x - 1$

non sono uguali, infatti le loro rappresentazioni grafiche sono le seguenti:

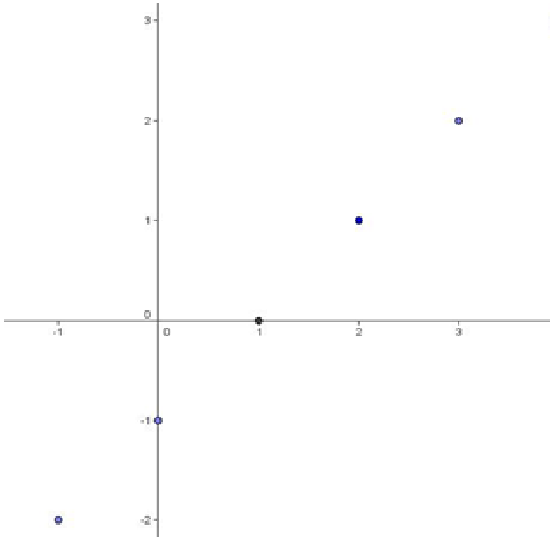


Grafico della funzione f(x)

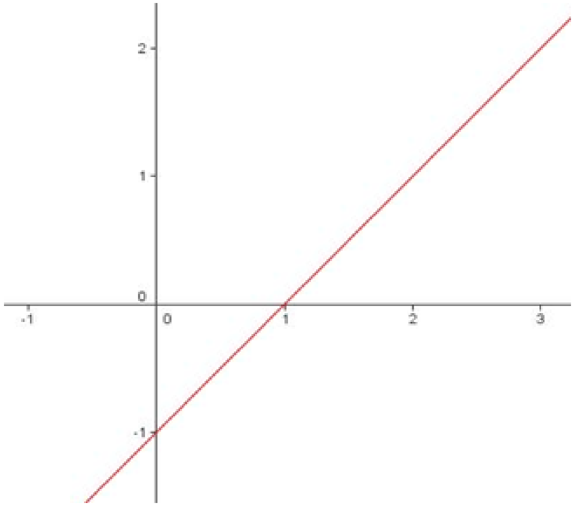


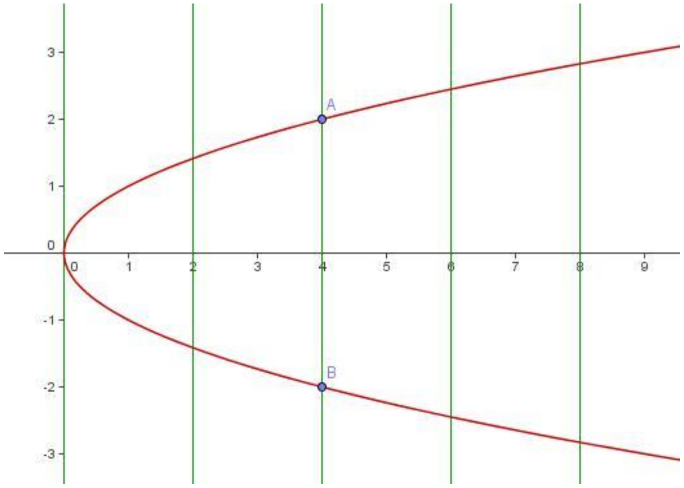
Grafico della funzione g(x)

Test delle rette verticali

Dato il grafico di una relazione è possibile capire se questa è una funzione o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette verticali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ordinate, stabilendo che se almeno una di tali rette interseca il grafico in almeno due punti distinti, allora il grafico non è quello di una funzione.

Esempio:

Dall'analisi del grafico rappresentato nella seguente figura a fianco è possibile notare l'esistenza di infinite rette parallele che intersecano la curva rappresentata in due punti. Di conseguenza questo grafico non rappresenta una funzione.



Caduta dei gravi

Una delle più importanti leggi della fisica afferma che il baricentro dei corpi è soggetto alla **forza di gravità** che agisce, in prossimità della terra, imprimendo ai corpi un'accelerazione costante, diretta verso il basso, pari a 9,8 m/s^2.

Se si trascura la resistenza dell'aria, la velocità di caduta dei corpi varia nel tempo secondo la legge:

$$v(t)=v_o+gt$$

dove v_o rappresenta la velocità iniziale del corpo. Tale legge è una funzione reale di variabile reale e mette in evidenza che un corpo in caduta libera non ha una velocità, ma essa aumenta col passare del tempo.

Grazie alla legge matematica è possibile effettuare **previsioni**: senza effettuare esperimenti, sapendo che la velocità iniziale del corpo è nulla, è possibile determinare la velocità dopo 10 s come segue:

$$v(10) = 0 + 9{,}8 \cdot 10 = 98 \text{ m/s}$$

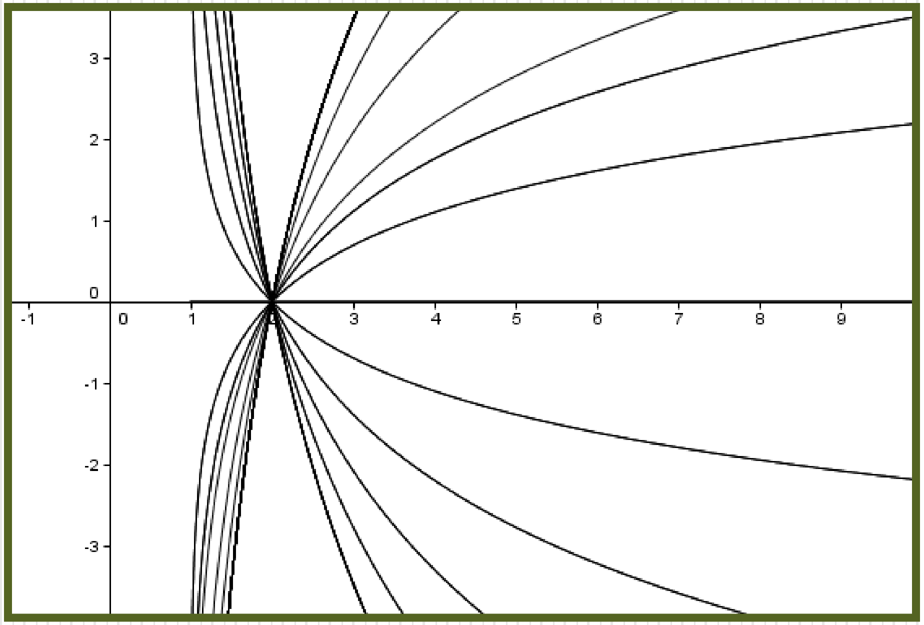
Grazie alla legge matematica è possibile **controllare** un esperimento: se si vuole che il corpo raggiunga una velocità di 200 m/s dopo 20 s, dall'equazione

$$200 = v(20) = v_o + 9{,}8 \cdot 20 = v_o + 196$$

si ricava che esso deve essere lanciato con una velocità iniziale

$$v_o = 200 - 196 = 4 \text{ m/s}.$$

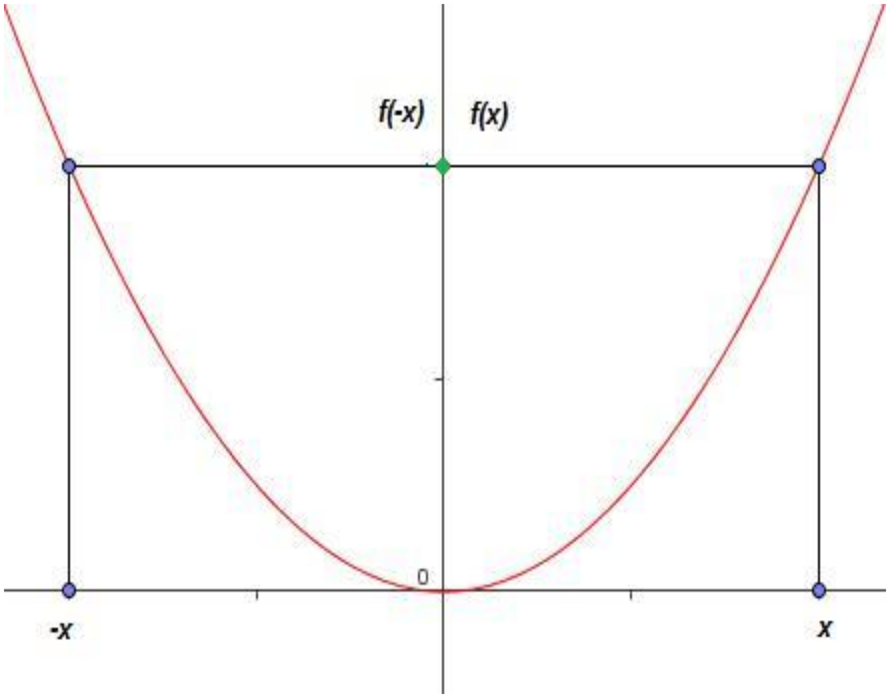
Proprietà delle funzioni



Funzioni pari

<u>Definizione</u>: Una funzione *y=f(x)* di dominio *D* si dice ***pari*** ,ovvero ***simmetrica rispetto all'asse delle ordinate***, se per ogni $x \in D$ si ha:

$$f(-x) = f(x)$$



Esempio:

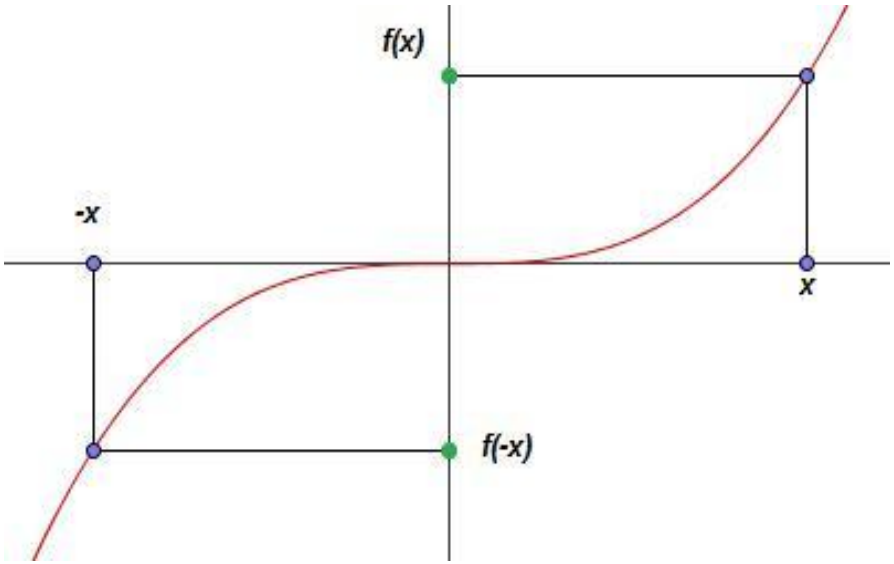
La funzione $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ è pari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = f(x)$$

Funzioni dispari

<u>Definizione</u>: Una funzione *y=f(x)* di dominio *D* si dice ***dispari*** ,ovvero ***simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani***, se per ogni $x \in D$ si ha:

$$f(-x) = -f(x)$$



Esempio:

La funzione $f(x) = x^3 + x$ è dispari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x)$$

Come stabilire se una funzione è pari o dispari?

Basta sostituire nell'espressione matematica della funzione al posto della variabile *x* il valore -*x*, di conseguenza si possono verificare le tre seguenti situazioni:

1. la funzione ottenuta è identica a quella di partenza ***funzione pari***;
2. la funzione ottenuta è opposta a quella di partenza ***funzione dispari***;
3. la funzione ottenuta non è né identica, né opposta a quella di partenza ***funzione né pari né dispari***.

Esempio:

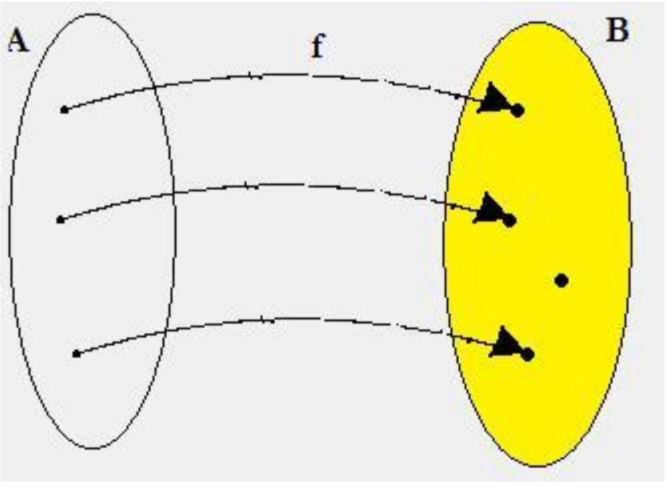
La funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ non è né pari né dispari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1 \neq \pm f(x)$$

Funzioni iniettive

<u>Definizione</u>: Una funzione si dice ***iniettiva*** se ad elementi distinti di *A* fa corrispondere elementi distinti di *B*, in formule:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$



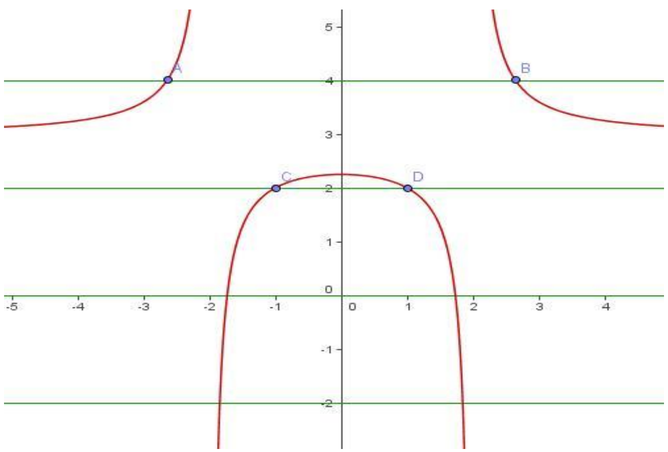
Esempio: La funzione $y = 2x\text{-}1$ è una funzione iniettiva in quanto:

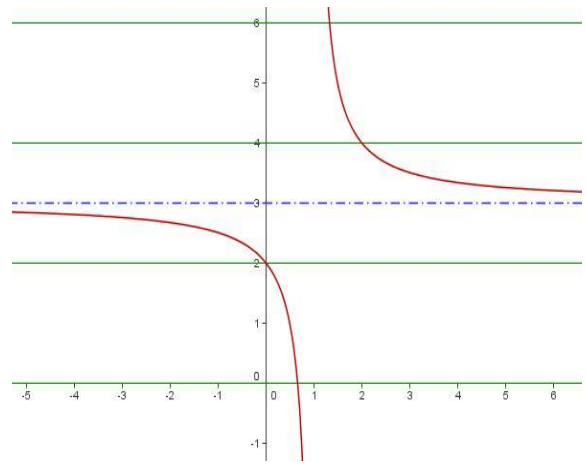
$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Osservazione: Si noti che nell'insieme *B* vi è un elemento che non è immagine di alcun elemento dell'insieme *A*.

Test delle rette orizzontali

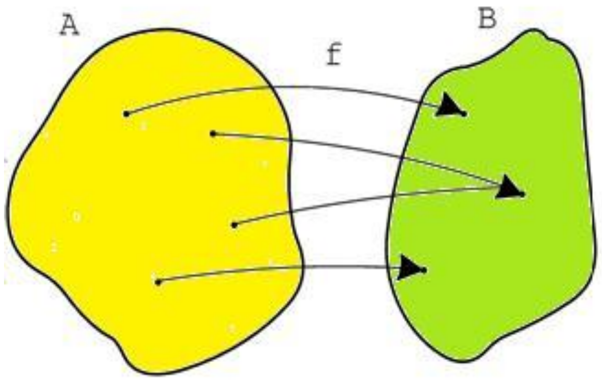
Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è iniettiva o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se almeno una di tali rette interseca il grafico in almeno due punti distinti, allora la funzione non è iniettiva perché esisterebbero due valori distinti della variabile indipendente ai quali è associato lo stesso valore della variabile dipendente.





Esempi: La funzione a sinistra non è iniettiva in quanto esistono infinite rette parallele all'asse delle ascisse che intersecano la funzione in due punti distinti. La funzione a destra è iniettiva in quanto qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in un solo punto.

Funzioni suriettive (o surgettive)



<u>Definizione</u>: Una funzione si dice ***suriettiva*** *o* ***surgettiva*** se ogni elemento di *B* è immagine di almeno un elemento di *A*, cioè se ***f(A)=B***. In formule:

$$\forall y \in B \; \exists \, x \in A \mid f(x) = y$$

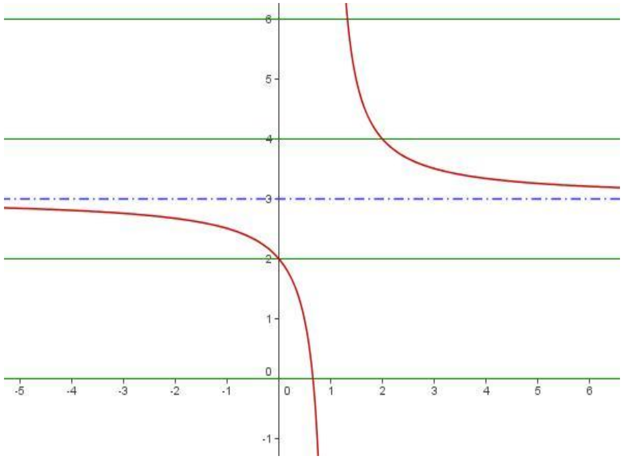
Esempio: La funzione *y = 2x-1* è una funzione iniettiva in quanto:

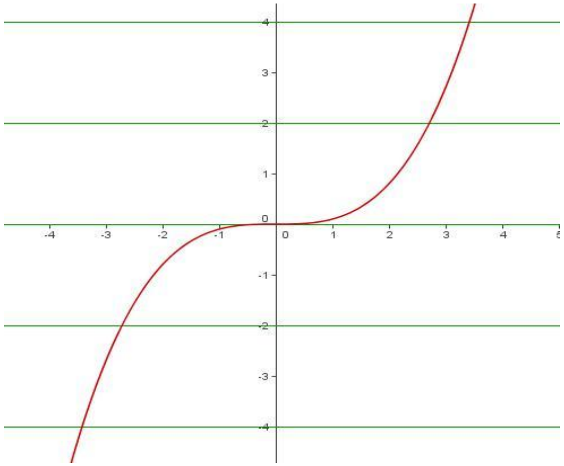
$$\forall y \in B \; \exists \, x \in A \mid 2x - 1 = y \quad \Rightarrow \quad 2x = y + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y+1}{2}$$

Osservazione: Si noti che nell'insieme *B* vi è un elemento che è immagine di due elementi dell'insieme *A*.

Test delle rette orizzontali

Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è suriettiva o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se almeno una di tali rette non interseca il grafico in nessun punto, allora la funzione non è suriettiva perché esisterebbe almeno un valore della variabile dipendente che non ha controimmagine.





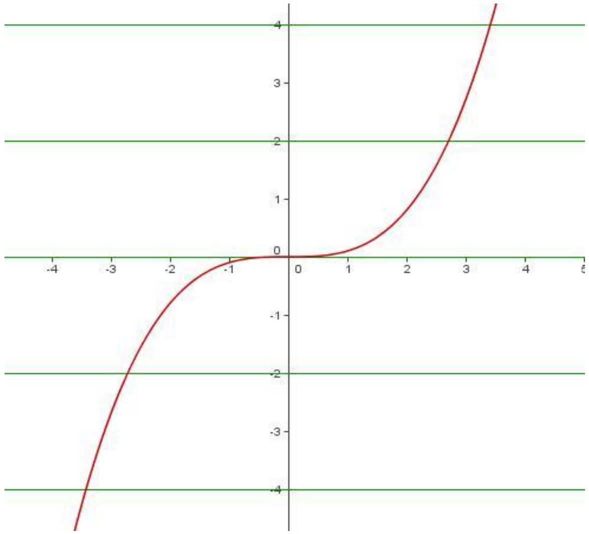
Esempi: La funzione a sinistra non è suriettiva in quanto esiste una retta parallela all'asse delle ascisse che non interseca il grafico della funzione in nessun punto. La funzione a destra è suriettiva in quanto qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse interseca il grafico della funzione in almeno un punto.

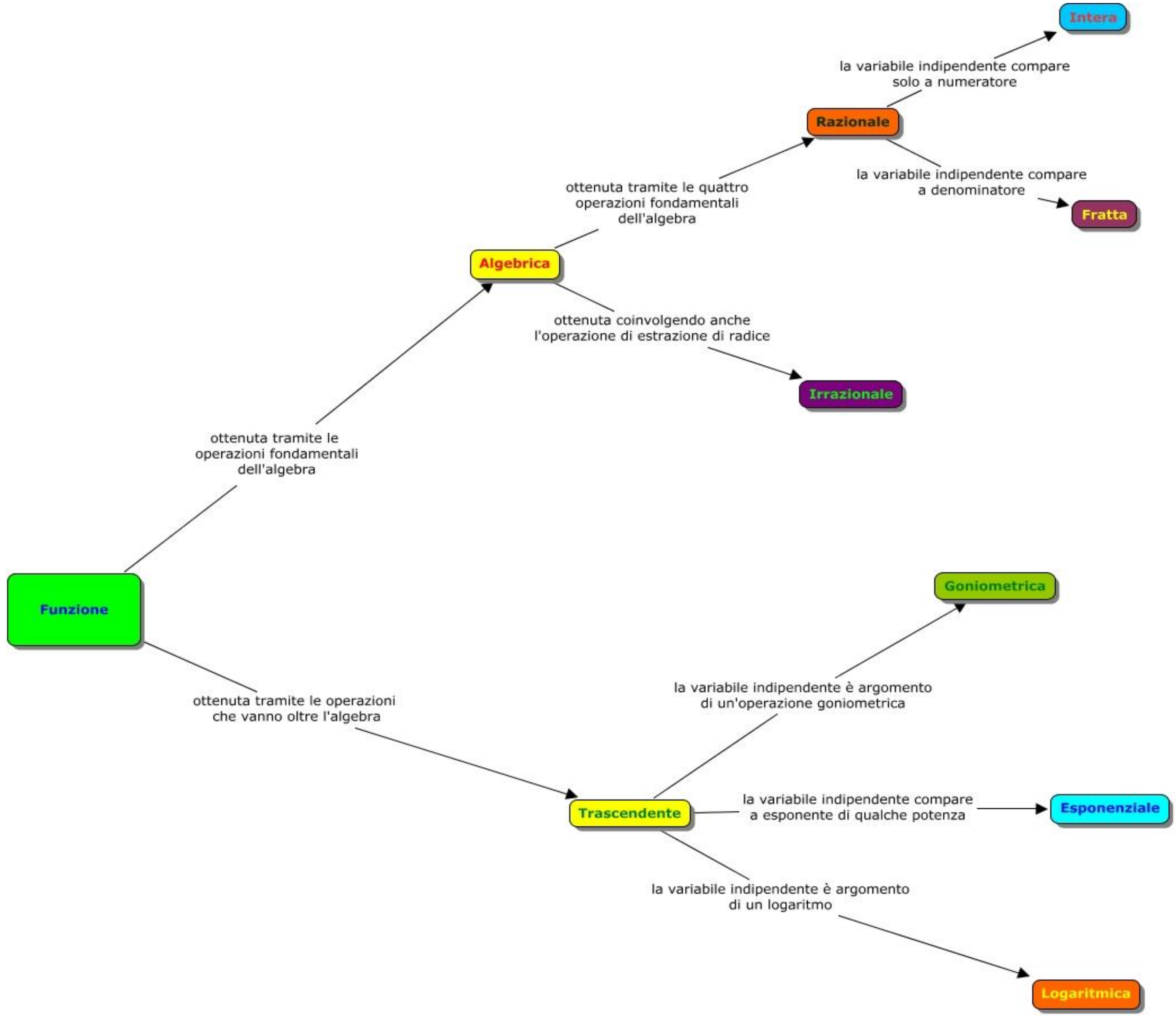
Funzioni biiettive (o biunivoche)

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice ***biiettiva*** o ***biunivoca*** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Test delle rette orizzontali

Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è biunivoca o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Si tracciano delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se ogni retta tracciata da un qualunque punto del codominio interseca il grafico esattamente in un punto, allora la funzione è biunivoca.





Funzione
ottenuta tramite le operazioni fondamentali dell'algebra
Algebrica
ottenuta tramite le quattro operazioni fondamentali dell'algebra
Razionale
la variabile indipendente compare solo a numeratore
Intera
la variabile indipendente compare a denominatore
Fratta
ottenuta coinvolgendo anche l'operazione di estrazione di radice
Irrazionale
ottenuta tramite le operazioni che vanno oltre l'algebra
Trascendente
la variabile indipendente è argomento di un'operazione goniometrica
Goniometrica
la variabile indipendente compare a esponente di qualche potenza
Esponenziale
la variabile indipendente è argomento di un logaritmo
Logaritmica