“CENNI DI TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE”

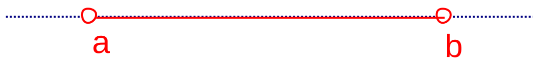
Prof. E. Modica
erasmo@galois.it
www.galois.it

INTERVALLI E INTORNI

Definizione: Si considerino i numeri reali a e b, con $a < b$, si definisce:

- ***intervallo aperto*** di estremi a e b, l’insieme di tutti i numeri reali x tali che $a < x < b$, cioè:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$

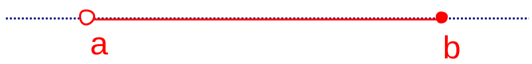


- ***intervallo aperto a destra*** di estremi a e b, l’insieme di tutti i numeri reali x tali che $a \leq x < b$, cioè:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$$

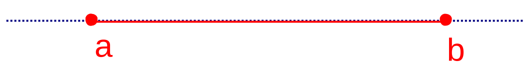
- ***intervallo aperto a sinistra*** di estremi a e b, l’insieme di tutti i numeri reali x tali che $a < x \leq b$, cioè:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$$



- ***intervallo chiuso*** di estremi a e b, l’insieme di tutti i numeri reali x tali che $a \leq x \leq b$, cioè:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$



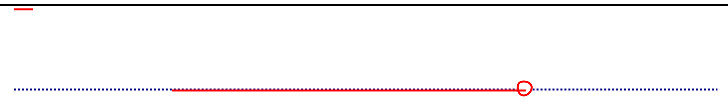
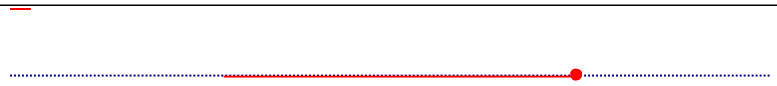
Spesso per indicare gli intervalli aperti si utilizzano le parentesi tonde al posto delle parentesi quadre, cioè:

- con (a, b) si indica anche l’intervallo aperto $]a, b[$;
- con $[a, b)$ si indica anche l’intervallo aperto a destra $[a, b[$;
- con $(a, b]$ si indica anche l’intervallo aperto a sinistra $]a, b]$.

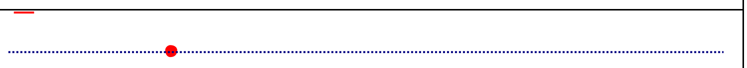
Esempio: L'intervallo aperto a destra $[2,5[$ indica l'insieme di tutti i numeri reali che sono compresi tra 2 e 5 ad esclusione dell'estremo 5.

<u>Definizione</u>: Si consideri il numero reale *a*, si definiscono:

- ***intervalli illimitati inferiormente***, rispettivamente ***aperto*** e ***chiuso***, gli insiemi:

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$	
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$	

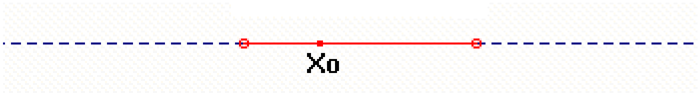
- ***intervalli illimitati superiormente***, rispettivamente ***aperto*** e ***chiuso***, gli insiemi:

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$	
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$	

Osservazione: Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti di una retta orientata. Grazie a tale corrispondenza è possibile scambiare la parola *numero* con la parola *punto*.

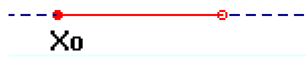
<u>Definizione</u>: Si definisce:

- ***intorno completo di*** $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ un qualsiasi intervallo aperto contenente x_0;



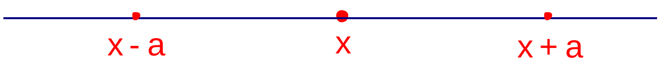
- ***intorno sinistro di*** $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ un qualsiasi intervallo aperto a sinistra avente come estremo destro x_0, cioè: $]a, x_0[$;

- ***intorno destro di*** $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ un qualsiasi intervallo aperto a destra avente come estremo sinistro x_0 cioè: $]x_0, a[$;



- ***intorno di*** $-\infty$ ogni intervallo illimitato inferiormente;
- ***intorno di*** $+\infty$ ogni intervallo illimitato superiormente;
- ***intorno di*** ∞ ogni insieme di numeri reali del tipo: $\left]-\infty, a\right[\cup \left]b, +\infty\right[$

- ***intorno circolare del punto*** x_0 un qualsiasi intervallo aperto del tipo $\left]x_0 - a, x_0 + a\right[$



- ***intorno circolare di infinito*** un qualsiasi intervallo aperto del tipo $\left]-\infty, a\right[\cup \left]a, +\infty\right[$

Proposizione: *L'intersezione di due intorni del punto* x_0 *è un ancora un intorno del punto* x_0.

INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

<u>**Definizione**</u>: Si consideri un sottoinsieme non vuoto *A* di ℝ, si dice che l'insieme *A* è:

- ***limitato superiormente*** se esiste un numero reale k, detto ***maggiorante*** di *A*, che risulta essere maggiore o uguale di ogni elemento di *A*.
- ***limitato inferiormente*** se esiste un numero reale h, detto ***minorante*** di *A*, che risulta essere minore o uguale di ogni elemento di *A*.
- ***illimitato superiormente*** se comunque si scelga un numero reale k esistono sempre elementi di *A* che siano maggiori di k.
- ***illimitato inferiormente*** se comunque si scelga un numero reale h esistono sempre elementi di *A* che siano minori di h.
- ***limitato*** se è limitato sia superiormente che inferiormente.
- ***illimitato*** se non è limitato né superiormente né inferiormente.

Esempi:

1. L'insieme dei numeri razionali è illimitato.
2. L'insieme dei numeri naturali è limitato inferiormente ed illimitato superiormente.

ESTREMI DI UN INSIEME

Definizione: Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, se:

- esiste un numero reale $m \in A$ tale che, per ogni $x \in A$, si abbia $m \leq x$, allora m prende il nome di ***minimo*** di A e si scrive $m = \min A$;
- esiste un numero reale $M \in A$ tale che, per ogni $x \in A$, si abbia $x \leq M$, allora M prende il nome di ***massimo*** di A e si scrive $M = \max A$.

Osservazione: Ogni insieme finito e non vuoto di numeri reali ammette sempre massimo e minimo, mentre se un insieme è infinito non è detto che li ammetta. Infatti l'insieme:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

è dotato di massimo $1 = \max A$, ma, anche se è limitato inferiormente dallo zero, non ammette minimo (perché $0 \notin A$).

Esempi:

1. L'intervallo $]0,3]$ ha come massimo il numero 3, ma non ammette minimo.
2. L'insieme dei numeri naturali ammette lo 0 come minimo ma non ammette massimo, in quanto non è limitato superiormente.

Dato che non sempre ha senso parlare di massimo e minimo di un insieme, si introduce il concetto più generale di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme.

Definizioni:

1. Un numero reale l si dice ***estremo inferiore*** per l'insieme $A \neq \emptyset$, e si indica con $\inf A$, se è il più piccolo dei minoranti.
2. Un numero reale L si dice ***estremo superiore*** per l'insieme $A \neq \emptyset$, e si indica con $\sup A$, se è il più grande dei maggioranti.

Definizione: Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Il punto x_0 si dice ***di accumulazione per A*** se in ogni intorno di x_0 cadono *infiniti* punti di A.