Generalità sulle funzioni

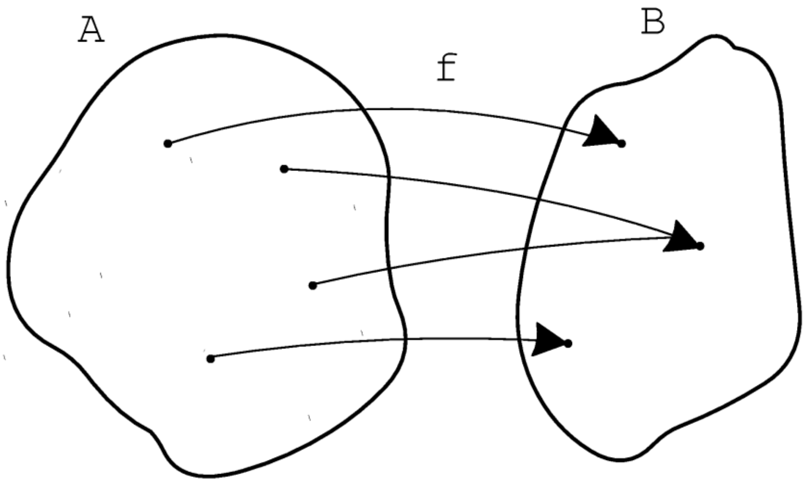
Definizione: Dati due insiemi A e B, si definisce ***funzione*** una relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

Osservazione: Dalla definizione si evince che ad ogni elemento di A deve essere associato un solo elemento di B, ovvero non possono esistere elementi di A che non sono messi in relazione con un elemento di B.

Notazione: Per indicare una generica funzione dall'insieme A all'insieme B, si utilizza la scrittura

$$f: A \to B$$

che viene letta "*effe è una funzione che va da A verso B*".



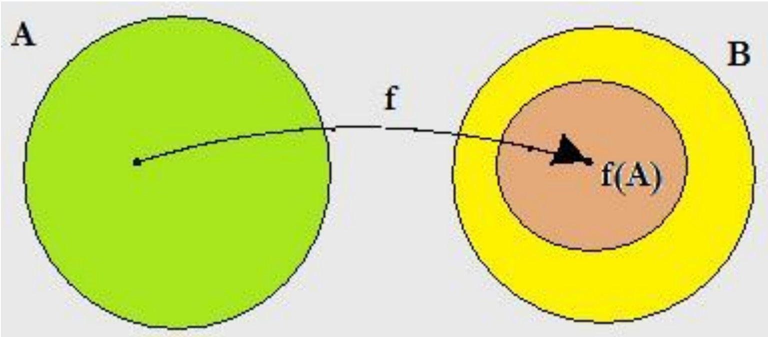
Inoltre per indicare che l'elemento $b \in B$ è il corrispondente dell'elemento $a \in A$, si utilizza la scrittura:

$$b = f(a)$$

Terminologia:

1. L'elemento $b = f(a)$ prende il nome di ***immagine*** dell'elemento b tramite la funzione f.
2. L'elemento a si chiama ***controimmagine*** di b.
3. L'insieme A prende il nome di ***dominio***, o ***insieme di definizione***, o ***insieme di esistenza*** della funzione, mentre l'insieme B prende il nome di ***insieme di arrivo*** della f.
4. L'insieme delle immagini, indicato con $f(A)$ prende il nome di ***codominio*** della funzione.

Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it



Osservazioni: Non tutti gli elementi di B devono necessariamente essere l'immagine di un elemento di A, ci possono essere elementi di B che non fanno parte di $f(A)$ e per tale ragione il codominio della funzione è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo, cioè $f(A) \subseteq B$.

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice ***costante*** quando tutti gli elementi del dominio hanno la stessa immagine.

Funzioni numeriche

Definizione: La funzione $f: A \to B$ si dice ***numerica*** se gli insiemi A e B sono insiemi numerici.

Alla luce di questa definizione, se consideriamo come insieme numerico quello dei numeri reali $\mathbb{R}$, possiamo parlare di funzioni reali di variabile reale e quindi dare la seguente definizione:

Definizione: Una ***funzione reale di variabile reale*** è una relazione che lega due grandezze variabili in modo tale che, assegnati dei valori arbitrari ad una di esse (detta ***variabile indipendente***), restano univocamente determinati i valori dell'altra variabile (detta ***variabile dipendente***).

Notazioni: La variabile indipendente viene solitamente indicata con la lettera x, mentre la variabile dipendente viene indicata con la lettera y. Per evidenziare il fatto che la y dipende dalla x, si utilizza la scrittura:

$$y = f(x)$$

e si legge: "*y è funzione di x*".
Tale scrittura viene detta ***forma esplicita*** della funzione, in contrapposizione alla scrittura:

$$F(x, y) = 0$$

che prende il nome di ***forma implicita***.

Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it

Alla luce di questa nuova definizione è possibile riformulare i concetti dati nel paragrafo precedente come segue.

<u>Definizione</u>: Si definisce ***dominio*** della funzione $y = f(x)$ (e si indica con i simboli D, D_f o $dom\,f$), l'insieme di tutti i valori reali che si possono attribuire alla variabile x affinché il corrispondente valore della variabile y sia un numero reale.

Esempio:

Il dominio della funzione $y = \frac{1}{x}$ è dato dall'insieme $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

<u>Definzione</u>: Data una funzione di equazione $y = f(x)$, si definisce ***grafico della funzione*** l'insieme di tutti e soli punti del piano cartesiano aventi come ascissa i valori, appartenenti al dominio della variabile indipendente e come ordinata i corrispondenti valori della variabile dipendente:

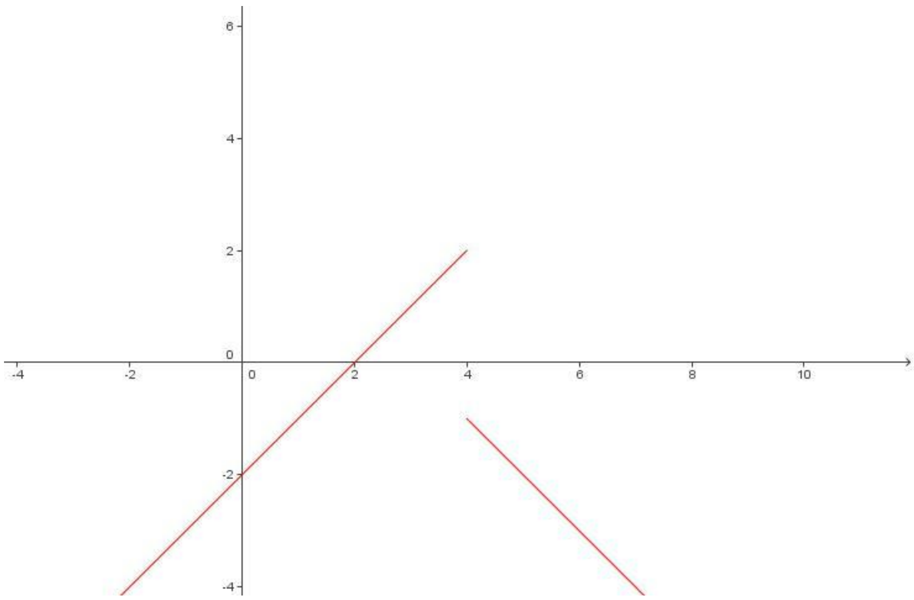
$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in dom\ f\}$$

Esempio:

Il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \geq 4 \\ 3 - x & x < 4 \end{cases}$$

è il seguente:



<u>Definizione</u>: Due funzioni reali di variabile reale sono ***uguali*** se hanno lo stesso dominio e la stessa legge matematica che le rappresenta.

Esempio:

Le funzioni:

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},\ \ f(x) = x - 1$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = x - 1$

non sono uguali, infatti le loro rappresentazioni grafiche sono le seguenti:

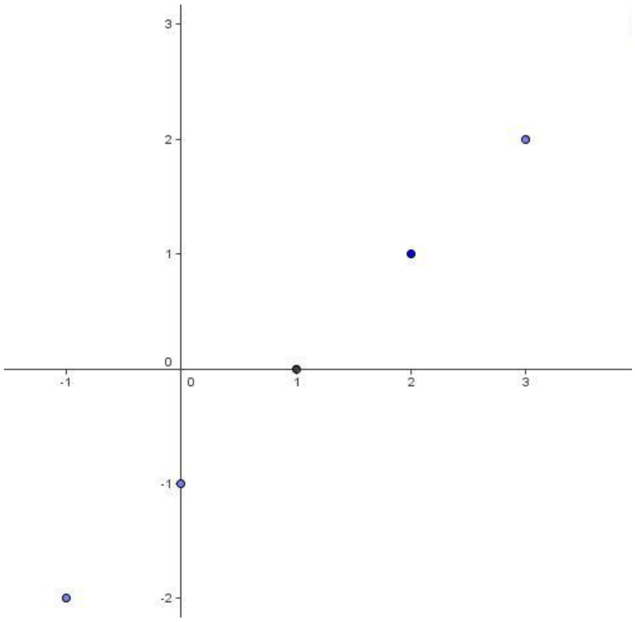


Grafico della funzione f(x)

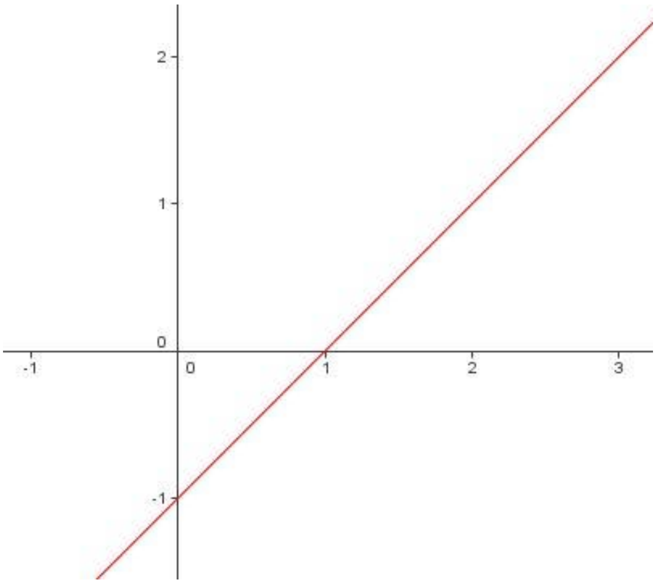


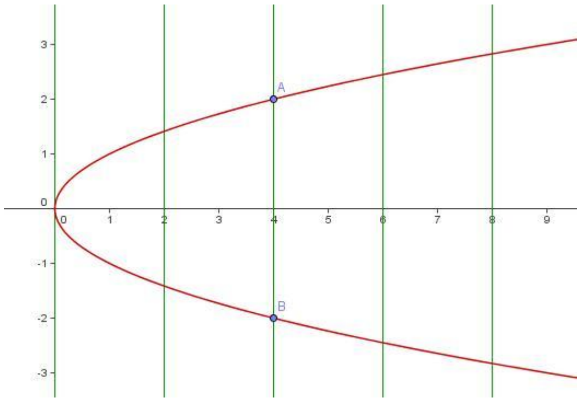
Grafico della funzione g(x)

Test delle rette verticali

Dato il grafico di una relazione è possibile capire se questa è una funzione o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette verticali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ordinate, stabilendo che se almeno una di tali rette interseca il grafico in almeno due punti distinti, allora il grafico non è quello di una funzione.

Esempio:

Dall'analisi del grafico rappresentato nella seguente figura a fianco è possibile notare l'esistenza di infinite rette parallele che intersecano la curva rappresentata in due punti. Di conseguenza questo grafico non rappresenta una funzione.



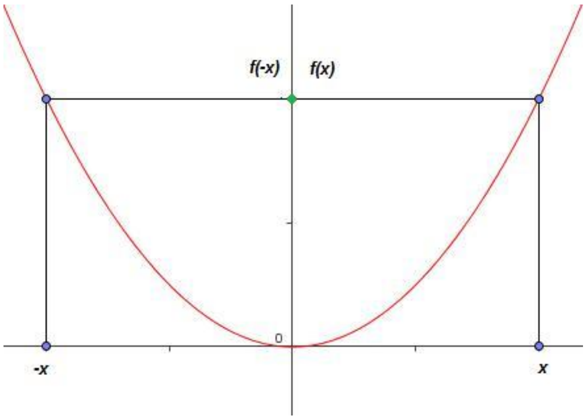
Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it

Proprietà delle funzioni

Funzioni pari e funzioni dispari

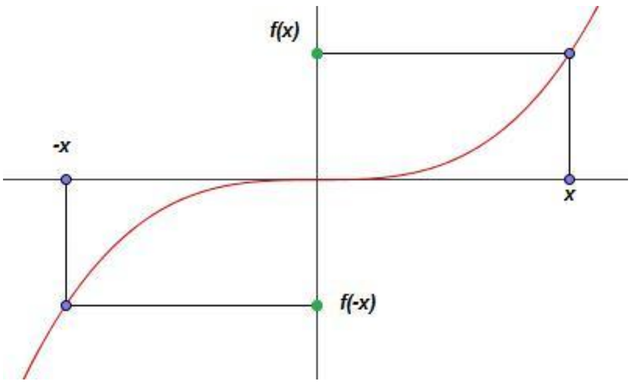
<u>Definizione</u>: Una funzione $y = f(x)$ di dominio D si dice ***pari*** ,ovvero ***simmetrica rispetto all'asse delle ordinate***, se per ogni $x \in D$ si ha:

$$f(-x) = f(x)$$



<u>Definizione</u>: Una funzione $y = f(x)$ di dominio D si dice ***dispari***, ovvero ***simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani***, se per ogni $x \in D$ si ha:

$$f(-x) = -f(x)$$



"Come stabilire se una funzione è pari o dispari?"

Basta sostituire nell'espressione matematica della funzione al posto della variabile *x* il valore -*x*, di conseguenza si possono verificare le tre seguenti situazioni:

- la funzione ottenuta è identica a quella di partenza ⇒ funzione pari;
- la funzione ottenuta è opposta a quella di partenza ⇒ funzione dispari;
- la funzione ottenuta non è né identica, né opposta a quella di partenza ⇒ funzione né pari né dispari.

Esempi:

1. La funzione $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ è pari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = f(x)$$

2. La funzione $f(x) = x^3 + x$ è dispari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -f(x)$$

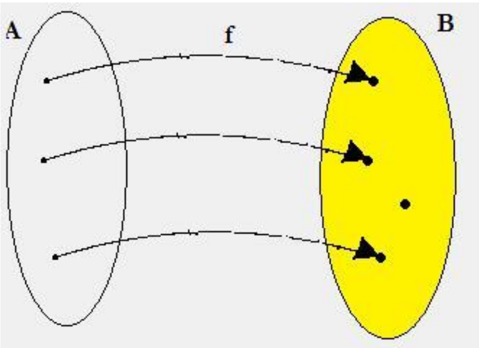
3. La funzione $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ non è né pari né dispari in quanto:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) + 1 = -x^3 + x^2 - x + 1 \neq \pm f(x)$$

Funzioni iniettive

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice ***iniettiva*** se a elementi distinti di A fa corrispondere elementi distinti di B, in formule:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$



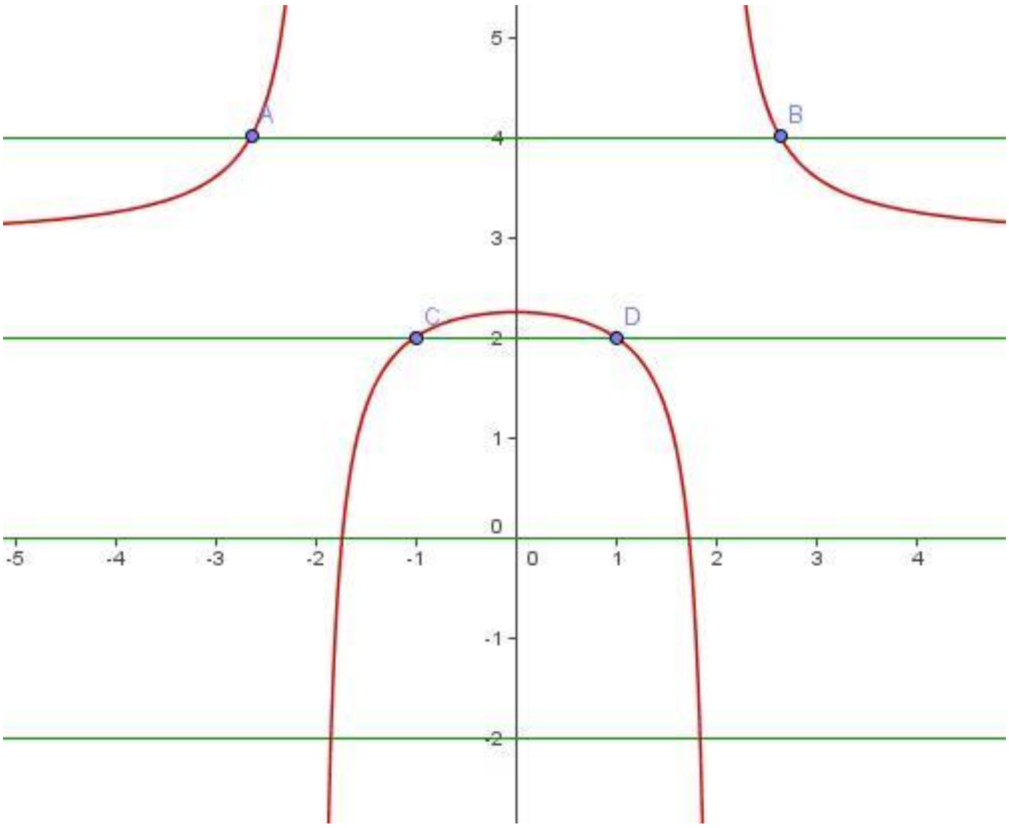
Osservazione: Si noti che nell'insieme B vi è un elemento che non è immagine di alcun elemento dell'insieme A.

Test delle rette orizzontali

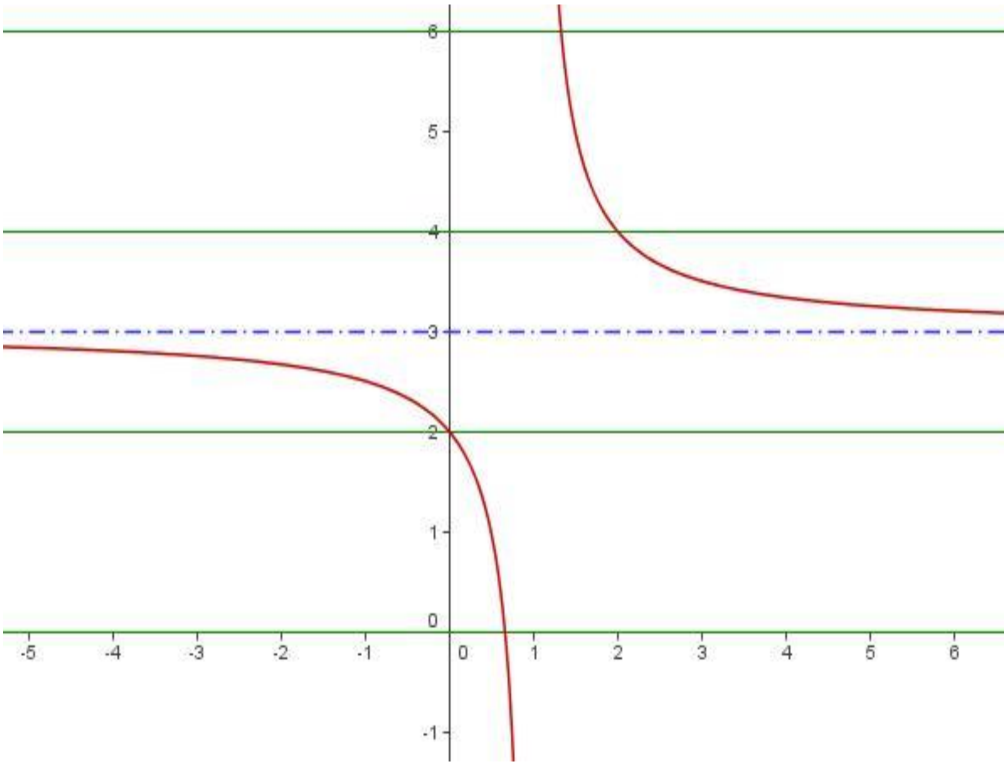
Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è iniettiva o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se almeno una di tali rette interseca il grafico in almeno due punti distinti, allora la funzione non è iniettiva perché esisterebbero due valori distinti della variabile indipendente ai quali è associato lo stesso valore della variabile dipendente.

Esempi:

La funzione rappresentata nel grafico a fianco non è iniettiva, in quanto esistono infinite rette parallele all'asse delle ascisse che intersecano la funzione in due punti distinti.



La funzione rappresentata nel grafico a fianco è iniettiva, in quanto qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse interseca la funzione in un solo punto.

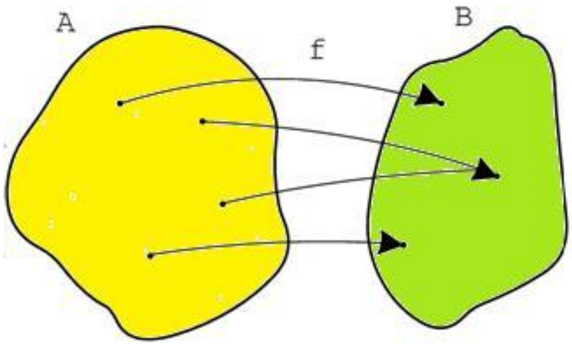


Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it

Funzioni suriettive

<u>**Definizione**</u>: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice ***suriettiva*** *o* ***surgettiva*** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, cioè se $f(A) = B$. In formule:

$$\forall y \in B \; \exists \; x \in A \mid f(x) = y$$

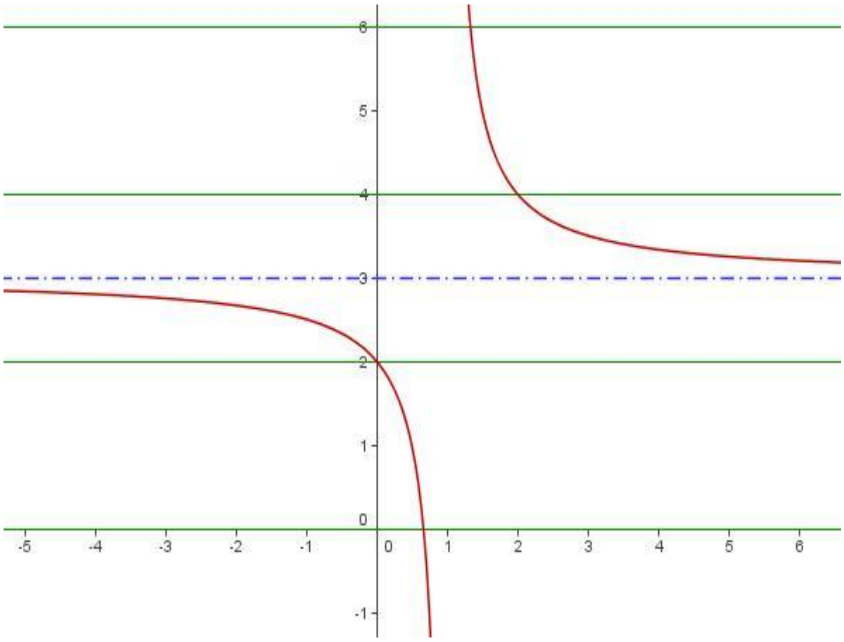


Test delle rette orizzontali

Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è suriettiva o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Esso consiste nel tracciare delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se almeno una di tali rette non interseca il grafico in nessun punto, allora la funzione non è suriettiva perché esisterebbe almeno un valore della variabile dipendente che non ha controimmagine.

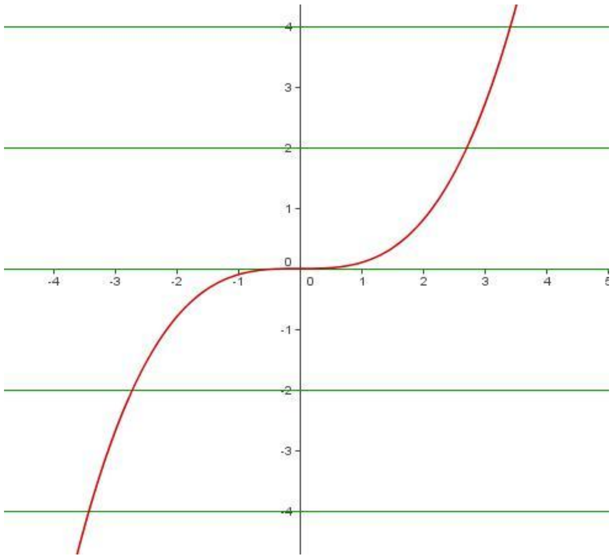
Esempi:

La funzione rappresentata nel grafico a fianco non è suriettiva, in quanto esiste una retta parallela all'asse delle ascisse che non interseca la funzione in nessun punto.



Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it

La funzione rappresentata nel grafico a fianco è suriettiva, in quanto qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse interseca la funzione in almeno un punto.

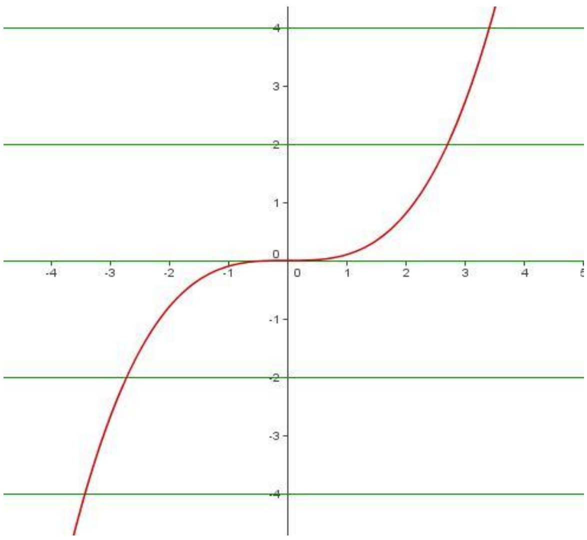


Funzioni biunivoche

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice ***biunivoca*** *o* ***bigettiva*** se è sia iniettiva che suriettiva.

Test delle rette orizzontali

Dato il grafico di una funzione è possibile capire se questa è biunivoca o meno effettuando il cosiddetto "***test delle rette orizzontali***". Si tracciano delle rette parallele all'asse delle ascisse, stabilendo che se ogni retta tracciata da un qualunque punto del codominio interseca il grafico esattamente in un punto, allora la funzione è biunivoca.



Funzioni monotone

Definizione: Sia data una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$ definita in un insieme non vuoto X contenente almeno due elementi. Diremo che la funzione f è:

- ***crescente*** in X se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$;
- ***decrescente*** in X se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$;
- ***non decrescente*** in X se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ***non crescente*** in X se $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$.

Erasmo Modica
www.matematica.blogscuola.it

Esempi:

- La funzione $f(x) = 3x + 1$ è ***crescente*** nel suo dominio ℝ ℝ in quanto:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

- La funzione $f(x) = 2 - x$ è ***decrescente*** nel suo dominio ℝ in quanto:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad 2 - x_1 < 2 - x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Classificazione delle funzioni