

LICEO SCIENTIFICO

Modulo di Recupero Classi Quinte

“Continuità e Derivate”

Premesse:

- ☞ Un'esperienza che tutti gli insegnanti vivono quotidianamente è quella dell'insoddisfazione da parte di molti studenti nei confronti della scuola, dei suoi ritmi, della richiesta di impegno che implicitamente ed esplicitamente viene loro richiesta. Come conseguenza di questa insoddisfazione si presenta anche un rendimento scarso di una parte degli stessi studenti. L'utilità del lavoro di recupero, consiste nel ritrattare gli argomenti affrontati durante le ordinarie ore di lezione curricolari utilizzando una metodologia didattica alternativa a quella precedentemente proposta, mirata all'agevolazione della comprensione dei punti “oscuri” per gli studenti. Grazie proprio alla possibilità di potersi avvicinare maggiormente ai diversi stili cognitivi di ciascuno di loro, viene meno la pressione che gli studenti avvertono su di sé e che è dovuta ai ritmi scolastici.
- ☞ Prima dell'inizio del recupero lo studente deve essere a conoscenza del senso dell'attività, di quelle che sono le sue carenze, nonché dell'importanza dell'acquisizione delle competenze che non possiede. Il tutto deve essere presentato nell'ottica di una “*difficoltà momentanea*” che può essere superata grazie anche a questo tipo di intervento.
- ☞ Il modulo è suddiviso in 7 incontri di 3 o 4 ore ciascuno per un totale di 24 ore, da svolgersi durante le ore pomeridiane come attività extra-curricolare.
- ☞ Sono state inoltre inserite delle attività di “*sportello*”, cioè delle ore in cui il docente si ferma a dialogare col singolo studente che intende affrontare dei problemi di apprendimento, circoscritti o specifici, avvalendosi quindi di assistenza individuale. Ciò può essere utile per abbattere le inibizioni che uno studente ha quando presenta pubblicamente i suoi dubbi.

Valutazione:

Tutti i materiali prodotti da ogni singolo studente durante le attività di recupero verranno via via raccolti e valutati alla fine di ogni singolo incontro, in modo da poter monitorare l'acquisto delle competenze che precedentemente non possedeva. Si ritiene inoltre opportuno non imbattersi in valutazioni comparative al fine di non scoraggiare gli studenti stessi alimentando una competizione distruttiva.

CONTENUTI/ TEMPO	ATTIVITA'	ESITI FORMATIVI
<p>Il metodo di studio</p> <p><i>3 ore</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Suggerimenti per analizzare il proprio "stile" di studio e, eventualmente, modificarlo.</i> 2. <i>Suggerimenti per pianificare il tempo a disposizione</i> 3. <i>Suggerimenti ed esempi per studiare in modo efficace:</i> <ul style="list-style-type: none"> • come collocare l'argomento in rapporto a ciò che si sa • come porsi le giuste domande e attivare aspettative • come/che cosa sottolineare, evidenziare, annotare a margine • come prendere appunti e riassumere testi • come schematizzare 	<ul style="list-style-type: none"> ☞ Conoscere il proprio stile di studio ☞ Pianificare e gestire il proprio tempo ☞ Saper costruire schemi chiari e coerenti ☞ Saper utilizzare un libro di testo
<p>Funzioni continue e principali proprietà</p> <p>Discontinuità delle funzioni</p> <p><i>3 ore</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Risoluzione di esercizi sulla continuità con particolare attenzione per le funzioni definite a tratti</i> 2. <i>Esercitazione individuale con correzione collettiva</i> 	<ul style="list-style-type: none"> ☞ Saper stabilire la continuità di una funzione utilizzando le proprietà delle funzioni continue ☞ Saper riconoscere e classificare i punti di discontinuità di una funzione

<p>Definizione di derivata e teorema di continuità delle funzioni derivabili</p> <p>Significato geometrico della derivata</p> <p>Derivate delle funzioni fondamentali</p> <p><i>4 ore</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Presentazione di esempi di funzioni continue ma non derivabili</i> 2. <i>Risoluzione di esercizi relativi alla derivabilità di funzioni</i> 3. <i>Esercitazione individuale con correzione collettiva</i> 4. <i>Attività di “sportello”</i> 	<p>☞ Comprendere l'importanza del teorema di continuità delle funzioni derivabili</p> <p>☞ Saper calcolare la derivata di una funzione partendo dalla definizione</p> <p>☞ Saper applicare le regole di derivazione delle funzioni</p>
<p>Derivata di una funzione inversa e di una funzione composta</p> <p>Calcolo della tangente a una curva in un suo punto</p> <p><i>3 ore</i></p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Esercitazione collettiva sulla derivazione di funzioni composte</i> 2. <i>Presentazione di problemi relativi al calcolo delle tangenti</i> 3. <i>Attività di “sportello”</i> 	<p>☞ Saper derivare funzioni composte e funzioni inverse</p> <p>☞ Saper calcolare la tangente a una curva in un suo punto</p>
<p>Teoremi sulle funzioni derivabili:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Teorema di Rolle ▪ Teorema di Lagrange ▪ Teorema di Cauchy ▪ Teorema di De L'Hopital 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Rivisitazione delle dimostrazioni dei teoremi sulle funzioni derivabili</i> 2. <i>Risoluzione di esercizi sui teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy, De L'Hopital</i> 3. <i>Esercitazione individuale con correzione collettiva</i> 	<p>☞ Saper risolvere problemi che richiedono l'uso dei teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy, De L'Hopital</p>

<p>Crescenza e decrescenza di una funzione</p> <p>3 ore</p>		<p>☞ Saper determinare gli intervalli di crescita e decrescenza di una funzione</p>
<p>Massimi e minimi di una funzione</p> <p>Punti di flesso di una funzione e calcolo della tangente inflessionale</p> <p>Problemi di massimo e di minimo</p> <p>4 ore</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Risoluzione di esercizi sul calcolo dei punti di massimo e minimo con il metodo delle derivate successive</i> 2. <i>Studio analitico di alcune funzioni con flessi a tangente orizzontale, obliqua e verticale</i> 3. <i>Presentazione e applicazioni dei problemi di massimo e di minimo alla geometria e alla fisica</i> 4. <i>Esercitazione di gruppo</i> 	<p>☞ Saper calcolare i punti di massimo e minimo di una funzione</p> <p>☞ Saper distinguere i punti di flesso di una funzione, trovarne le coordinate e calcolare le tangenti inflessionali</p> <p>☞ Saper risolvere problemi di massimo e di minimo</p>
<p>Riepilogo</p> <p>Verifica</p> <p>4 ore</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Attività di “sportello”</i> 2. <i>Test di verifica</i> 3. <i>Correzione del test di verifica</i> 4. <i>Discussione sui metodi risolutivi utilizzati</i> 	<p>☞ Comprensione dell'utilità degli strumenti matematici analizzati</p> <p>☞ Saper sfruttare i concetti e le strategie di calcolo acquisite</p>

ESERCIZI UTILI

Continuità e derivabilità

1. Data la funzione definita a tratti $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$ si può affermare che:

- è continua ma non derivabile in $x=0$
- è continua e derivabile in $x=0$
- presenta una discontinuità di terza specie in $x=0$
- presenta una discontinuità di prima specie in $x=0$

2. Data la funzione definita a tratti $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$ si può affermare che:

- è continua ma non derivabile in $x=0$
- è continua e derivabile in $x=0$
- esiste una discontinuità di seconda specie in $x=0$
- presenta una discontinuità di prima specie in $x=0$

3. Data la funzione definita a tratti $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$ si può affermare che:

- è continua ma non derivabile in $x=0$
- presenta una discontinuità di seconda specie in $x=0$
- presenta una discontinuità di terza specie in $x=0$
- presenta una discontinuità di prima specie in $x=0$

4. Data la funzione definita a tratti $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$ si può affermare che:

- è continua ma non derivabile in $x=1$
- è continua e derivabile in $x=1$
- presenta una discontinuità di terza specie in $x=1$
- presenta una discontinuità di prima specie in $x=1$

5. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} a & \text{per } x \leq -1 \\ x^2 & \\ ax+1 & \text{per } x > -1 \end{cases}$

- a. calcolare il valore di a in modo che la funzione sia continua in tutto il suo dominio;
- b. nella funzione così determinata definire la natura del punto di ascissa -1 , calcolando le equazioni delle tangenti alla funzione in quel punto

Problemi di massimo e di minimo (applicazione alla fisica)

Le leggi della riflessione e della rifrazione si possono compendiare in questo unico *principio di Fermat*: la luce nella sua propagazione segue sempre il cammino per cui impiega il minimo tempo. Lo constateremo considerando separatamente i due casi della riflessione e della rifrazione, risolvendo i seguenti problemi:

a) In un piano, A e B sono due punti da una stessa parte della retta s; da A esce un raggio di luce, il quale, dopo aver colpito la retta s, muovendosi con velocità costante v raggiunge il punto B. Si domanda qual è il punto C della retta s a cui corrisponde il minimo tempo perché la luce passi da A a B.

Siano P e Q le proiezioni di A e B sulla retta s e si ponga

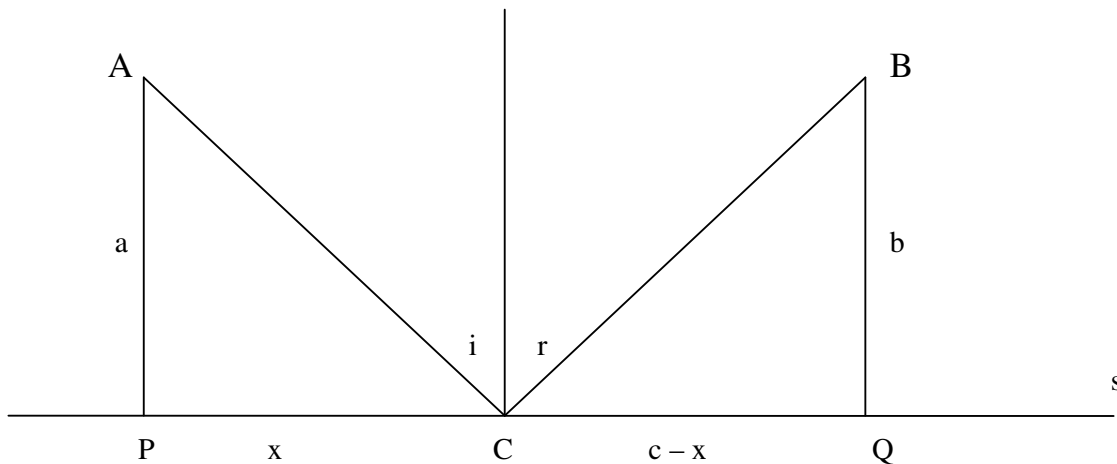
$$AP = a, \quad BQ = b, \quad PQ = c, \quad PC = x;$$

risulta

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2} \quad CB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

perciò, essendo v la velocità della luce, il tempo T che essa impiega per percorrere il cammino ACB è dato dall'espressione:

$$T = \frac{1}{v} \left[\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2} \right].$$



Per trovare il minimo di T dobbiamo annullare la derivata prima, il che porta all'equazione:

$$T' = \frac{1}{v} \left\{ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \right\} = 0$$

ossia

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Da qui bisognerebbe ricavare il valore di x , ma è più semplice interpretare geometricamente il risultato. Infatti, la relazione trovata si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{PC}{AC} = \frac{CQ}{CB}$$

ossia, detti \hat{i} e \hat{r} gli angoli che i raggi incidente e riflesso formano rispettivamente con la perpendicolare in C alla retta s :

$$\sin \hat{i} = \sin \hat{r}$$

e quindi

$$\hat{i} = \hat{r}$$

Questa è la nota legge della riflessione.

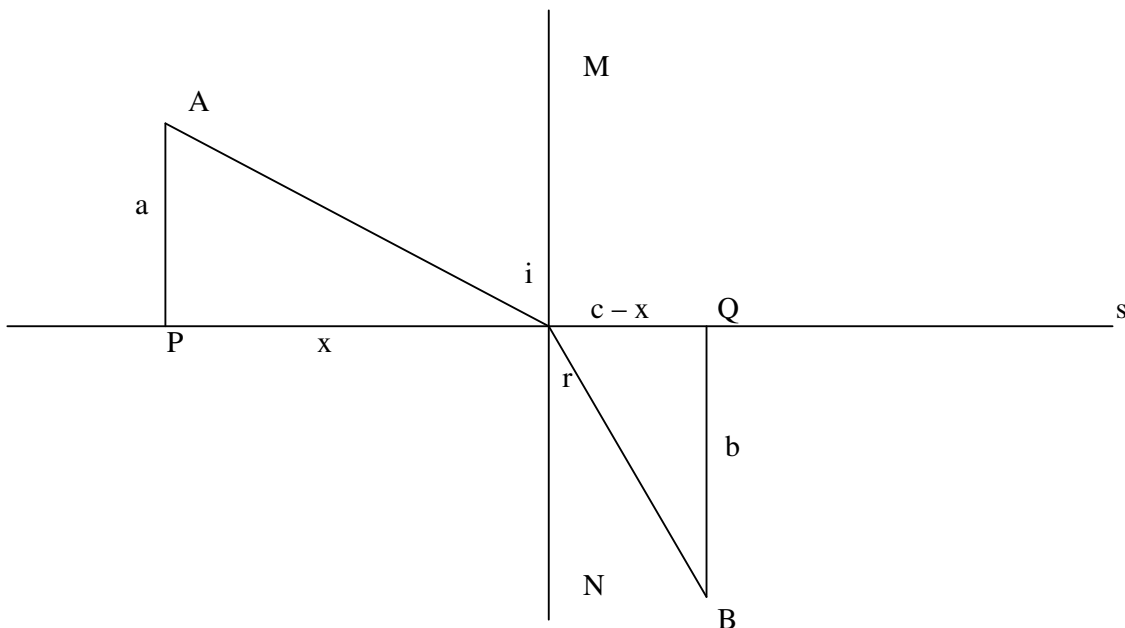
E' superfluo verificare che questa soluzione corrisponde a un minimo.

b) In un piano, A e B sono due punti situati da parti opposte di una retta s , linea di separazione di due mezzi diversi nei quali la luce si propaga con velocità v_1 e v_2 . Qual è il punto C della retta a cui corrisponde il percorso di minimo tempo?

Siano ancora P e Q le proiezioni di A e B sulla retta s e si ponga:

$$AP = a, \quad BQ = b, \quad PQ = c, \quad PC = x;$$

sia inoltre MN la perpendicolare alla retta s nel punto C .



Risulta

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2} \qquad CB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2};$$

perciò i tempi che impiega la luce per andare da A a C e da C a B sono rispettivamente

$$\frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Il tempo totale che si deve rendere minimo è pertanto:

$$f(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Derivando ed annullando la derivata, si ottiene:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v_2 \cdot \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0.$$

Questa equazione può essere riscritta come:

$$\frac{1}{v_1} \frac{PC}{AC} = \frac{1}{v_2} \frac{CQ}{CB}$$

ovvero, indicati con \hat{i} e \hat{r} gli angoli di incidenza e di rifrazione,

$$\frac{1}{v_1} \sin \hat{i} = \frac{1}{v_2} \sin \hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}.$$

La relazione trovata esprime la nota legge di Snell – Cartesio della rifrazione.