Equazioni reciproche

Un'equazione si dice **reciproca** quando i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono uguali oppure quando sono uguali in modulo ma di segno opposto.

Equazioni reciproche di terzo grado 1[a] specie

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

Il primo membro di tale equazione é divisibile per $x + 1$ e quindi, applicando la regola di Ruffini, si ottiene:

$$(x+1)[ax^2 + (b-a)x + a] = 0$$

Risolvendo le due equazioni si ottengono le soluzioni dell'equazione data.

Esempio:

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$$

Utilizzando la regola di Ruffini possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$(x+1)(3x^2 + 10x + 3) = 0$$

Risolvendo infine le due equazioni:

$$x + 1 = 0 \qquad\qquad 3x^2 + 10x + 3 = 0$$

si ottengono le seguenti soluzioni:

$$x_1 = -1 \; ; \quad x_2 = -\frac{1}{3} \; ; \quad x_3 = -3$$

Equazioni reciproche di terzo grado 2[a] specie

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$$

Il primo membro di tale equazione é divisibile per $x - 1$ e quindi, applicando la regola di Ruffini, si ottiene:

$$(x-1)[ax^2+(a+b)x+a]=0$$

Esempio:

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$3x^3+7x^2-7x-3=0$$

Utilizzando la regola di Ruffini possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$(x-1)(3x^2+10x+3)=0$$

Risolvendo infine le due equazioni:

$$x-1=0 \qquad\qquad 3x^2+10x+3=0$$

si ottengono le seguenti soluzioni:

$$x_1 = 1\ ;$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}\ ; \qquad x_3 = -3$$

Equazioni reciproche di quarto grado 1ª specie

$$\mathbf{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + c = 0}$$

dividendo ambo i membri per x^2 otteniamo:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

e, raccogliendo a fattore i coefficienti uguali, si ha:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

Posto $x+\frac{1}{x}=t$ ed elevando ambo i membri al quadrato,si ha che:

$$a(t^2-2) + bt + c = 0$$

da cui segue che:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0.$$

Risolvendo quest'ultima equazione otteniamo i valori t_1 e t_2 che sostituiti all'uguaglianza $x + \frac{1}{x} = t$ ci danno le soluzioni dell'equazione reciproca.

Esempio:

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$$

Sfruttiamo il procedimento precedentemente illustrato:

$$12x^2 + 4x - 41 + \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0;$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0;$$

$$12(t^2-2) + 4t - 41 = 0;$$

$$12t^2 + 4t - 65 = 0;$$

$$t_1 = \frac{13}{6}; \quad t_2 = -\frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_4 = -2 .$$

Equazioni reciproche di quarto grado 2ª specie

$$\mathbf{ax^4 + bx^3 - bx - c = 0}$$

Il primo membro dell'equazione é divisibile sia per $x - 1$ che per $x + 1$ per cui otterremo:

$$(x+1)(x-1)(ax^2 + bx + a) = 0$$

Risolvendo queste tre equazioni si ottengono le soluzioni cercate.

Esempio:

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$10x^4 - 29x^3 + 29x - 10 = 0$$

Sfruttando il procedimento illustrato si ha:

$$(x+1)(x-1)(10x^2 - 29x + 10) = 0$$

Da qui segue che:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \frac{2}{5} \qquad x_4 = \frac{5}{2}\ .$$

Equazioni reciproche di quinto grado

$$\mathbf{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$$

Bisogna dividere l'equazione per x – 1 o per x + 1 per ricondursi a uno dei casi precedentemente illustrati.

Esempio:

Trovare le soluzioni dell'equazione:

$$12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12 = 0$$

Dividendo per x + 1 si ottiene:

$$(x+1)(12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12) = 0$$

Da qui segue che:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{3}{2} \qquad x_3 = \frac{2}{3} \qquad x_4 = -\frac{1}{2} \qquad x_5 = -2$$