"RAPPORTI E PROPORZIONI"

RAPPORTI E PROPORZIONI

Definizione: Dicesi ***rapporto*** fra due numeri, preso in un certo ordine, il quoziente della divisione fra il primo di essi e il secondo.

Il rapporto tra i numeri 1 e 2 può essere espresso mediante una delle tre scritture:

$$\frac{1}{2} \qquad 1:2 \qquad 0,5$$

Definizione: Due rapporti si dicono ***uguali*** se hanno lo stesso valore.

Esempio:

I rapporti $14:7$ e $28:14$ sono uguali.

Definizione: Si definisce ***proporzione*** l'uguaglianza di due rapporti, cioè:

$$a:b=c:d$$

Per indicare i termini di una proporzione si indica la seguente terminologia:
- i termini *a* e *c* prendono il nome di ***antecedenti***;
- i termini *b* e *d* prendono il nome di ***conseguenti***;
- i termini *a* e *d* prendono il nome di ***estremi***;
- i termini *b* e *c* prendono il nome di ***medi***.

Definizione: Una proporzione si dice ***continua*** se ha i medi uguali e ciascuno dei due medi uguali prende il nome di ***medio proporzionale***.

Esempio: La proporzione $4:6=6:9$ è continua e il numero 6 è il medio proporzionale.

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

1. **Proprietà fondamentale delle proporzioni**: *in ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$, il prodotto dei medi è $10\cdot 15=150$, mentre il prodotto degli estremi è $5\cdot 30=150$.

2. **Proprietà dell'invertire**: *in ogni proporzione, se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene ancora una proporzione.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà dell'invertire si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $10:5=30:15$, che è ancora una proporzione.

3. **<u>Proprietà del permutare</u>**: *in ogni proporzione, se si scambiano fra loro i medi oppure gli estremi, si ottiene ancora una proporzione.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà del permutare si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $30:10=15:5$, che è ancora una proporzione.

4. **<u>Proprietà del comporre</u>**: *in ogni proporzione la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto sta al terzo (o al quarto).*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà del comporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $30+10\ :10=\ 15+5\ :5\ \rightarrow\ 40:10=20:5$, che è ancora una proporzione.

5. **<u>Proprietà dello scomporre</u>**: *in ogni proporzione che ha gli antecedenti maggiori dei conseguenti, la differenza fra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) come la differenza fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà dello scomporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $30-10\ :10=\ 15-5\ :5\ \rightarrow\ 20:10=10:5$, che è ancora una proporzione.

ULTERIORI PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

<u>Proprietà 1</u>: *In una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente.*

Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $5+15\ :\ 10+30\ =15:30\ \rightarrow\ 20:40=15:30$.

<u>Proprietà 2</u>: *In una proporzione la differenza tra il maggiore e il minore degli antecedenti sta alla differenza tra il maggiore e il minore dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente.*

Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $15-5\ :\ 30-10\ =15:30\ \rightarrow\ 10:20=15:30$.

<u>Proprietà 3</u>: *Moltiplicando due o più proporzioni termine a termine, si ottiene una nuova proporzione.*

Esempio: Date le proporzioni $5:10=15:30$ e $14:2=21:3$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $5\cdot 14\ :\ 10\cdot 2\ =\ 15\cdot 21\ :\ 30\cdot 3\ \rightarrow\ 70:20=315:90$.

Esercizio: *Scomporre il numero 120 in parti che stiano fra loro come i numeri 3, 4, 5.*

Indichiamo con *x*, *y* e *z* le tre parti da determinare, si ha:

$$x:3=y:4=z:5$$

Applicando la proprietà:

"*in una serie di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al proprio conseguente*",

si ottengono le proporzioni:

$$x+y+z \ : \ 3+4+5 \ = x:3$$
$$x+y+z \ : \ 3+4+5 \ = y:4$$
$$x+y+z \ : \ 3+4+5 \ = z:5$$

Essendo $x+y+z=120$, si avrà:

$$120:12 = x:3 \ \rightarrow \ x = \frac{120 \cdot 3}{12} = 30$$
$$120:12 = y:4 \ \rightarrow \ y = \frac{120 \cdot 4}{12} = 40$$
$$120:12 = z:5 \ \rightarrow \ z = \frac{120 \cdot 5}{12} = 50$$

CALCOLO DEL TERMINE INCOGNITO

Data una proporzione contenente un termine incognito è possibile calcolarlo mediante la proprietà fondamentale delle proporzioni. Infatti:

- se **il termine incognito è un medio** basta dividere il prodotto degli estremi per il medio noto, cioè:
$$a:b = x:c \quad \rightarrow \quad x = \frac{ac}{b}$$
- se **il termine incognito è un estremo** basta dividere il prodotto dei medi per l'estremo noto, cioè:
$$a:b = c:x \quad \rightarrow \quad x = \frac{bc}{a}$$
- se **il termine incognito è il medio proporzionale** basta calcolare la radice quadrata del prodotto degli estremi, cioè:
$$a:x = x:b \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{ab}$$

NUMERI PERCENTUALI

Definizione: Si dice ***numero percentuale*** un numero che viene riferito al valore fisso 100 ed in genere si indica facendolo seguire dal simbolo *%*, che si legge «*percento*».

Per *trasformare un numero percentuale in un numero decimale* basta dividere il numero per 100, per esempio:

$$12,3\% = \frac{12,3}{100} = 0,123$$

Se invece si vuole trasformare un *numero decimale in un numero percentuale* basta riscrivere la frazione con 100 a denominatore. Ad esempio:

$$0,12 = 0,12\frac{100}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$$

Esempio: Il prezzo di u maglione è di 125€ e in periodo di saldi viene applicato uno sconto del 30%. Qual è il prezzo scontato del maglione?

Calcoliamo lo sconto applicato sul prezzo del maglione mediante la proporzione:

$$30:100 = x:125$$

da cui ricaviamo:

$$x = \frac{125 \cdot 30}{100} = 37,5€$$

Di conseguenza il prezzo scontato è 87,5€.

GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI E INVERSAMENTE PROPORZIONALI

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero e sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$P = 3l$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro; etc.

Lato (l)	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro (P)	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto (P/l)	3	3	3	3	3	3

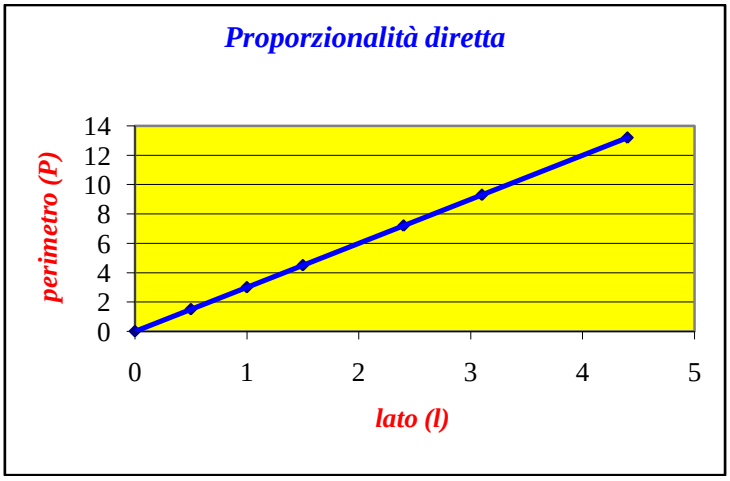
Definizione: Due grandezze x e y si dicono ***direttamente proporzionali*** se il loro rapporto è costante, cioè:

$$\frac{y}{x} = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = kx, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali.



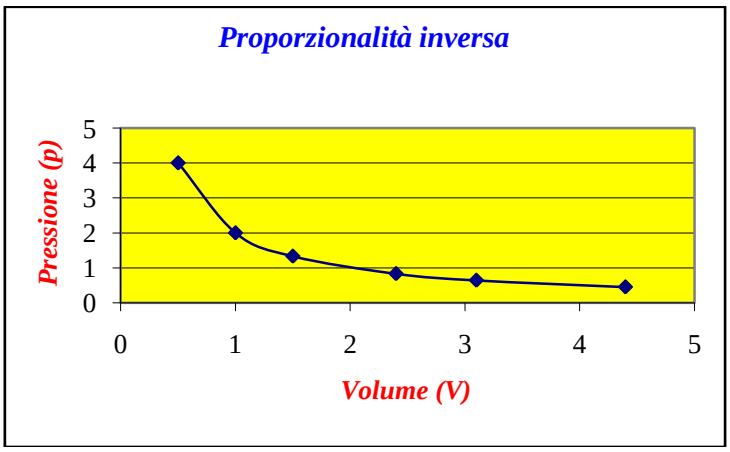
Consideriamo adesso un gas ideale e siano p e V la sua pressione e il suo volume. L'esperienza mette in evidenza il fatto che all'aumentare del volume diminuisce la pressione. Ciò significa che se il volume raddoppia la pressione dimezza, mentre se il volume dimezza la pressione raddoppia.

Volume (V)	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Pressione (P)	4	2	1,333333	0,833333	0,645161	0,454545
Prodotto (P·V)	2	2	2	2	2	2

<u>Definizione</u>: Due grandezze x e y si dicono ***inversamente proporzionali*** se il loro prodotto è costante, cioè:

$$x \cdot y = k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole in un sistema di assi cartesiani ortogonali.