"INSIEMI ED INSIEMI NUMERICI"
Prof. Erasmo Modica
erasmo@galois.it
www.galois.it

SIMBOLI MATEMATICI

Poiché in queste pagine verranno utilizzati differenti simboli matematici, è bene elencarne subito i principali.

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\in$	"appartiene"
$\notin$	"non appartiene"
$\mid$	"tale che"
$\wedge$	"e"
$\vee$	"o"
$\neg$	"non"
$\Rightarrow$	"implica" ovvero "allora"
$\Leftrightarrow$	"implica ed è implicato" ovvero "se e solo se"
$\forall$	"per ogni" ovvero "comunque scelgo"
$\exists$	"esiste"
$\exists!$	"esiste ed è unico"
$\nexists$	"non esiste"
$\mathbb{N}$	"insieme dei numeri naturali"
$\mathbb{Z}$	"insieme dei numeri interi"
$\mathbb{Q}$	"insieme dei numeri razionali"
$\mathbb{R}$	"insieme dei numeri reali"

GLI INSIEMI, I LORO ELEMENTI E LE RAPPRESENTAZIONI

Quello di **insieme** è un concetto primitivo, cioè un concetto semplice noto a priori e definibile solo mediante dei suoi sinonimi. In matematica sta ad indicare una collettività di oggetti di qualunque natura.
La definizione intuitiva di insieme risale a *Georg Cantor* (1845-1918), fondatore della teoria degli insiemi, il quale scriveva: "un insieme `e una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme".
Pertanto un insieme è individuato dai suoi elementi (**principio di estensione**).

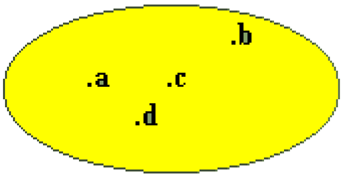
Notazione:

Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto, mentre gli ***elementi*** di un insieme con le lettere minuscole.
Per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A si utilizza il simbolo di appartenenza $\in$ e si scrive $a \in A$, in caso contrario si scrive $a \notin A$.

Gli insiemi possono essere rappresentati in diversi modi, le rappresentazioni più usate sono:

1. la **rappresentazione tabulare** o **estensiva** o **per elencazione**;
2. la **rappresentazione grafica**;
3. la **rappresentazione per caratteristica** o **intensiva**.

La **rappresentazione tabulare**, consiste nell'elencare, se possibile, tutti gli elementi di un insieme. Per esempio l'insieme *V* delle vocali è $V = \{a, e, i, o, u\}$.
La **rappresentazione grafica** consiste nell'indicare gli elementi di un insieme con punti interni a una linea piana chiusa e non intrecciata. Tale rappresentazione si deve al logico inglese *Venn* (1834-1923) che ideò il metodo più originale, anche se altri come *Eulero* (1707-1783) e *Leibniz* (1646-1716) avevano utilizzato questa tecnica da cui deriva la denominazione di *diagrammi di Eulero-Venn* .



La **rappresentazione caratteristica** consiste nello specificare un certo numero di proprietà atte a stabilire, in modo inequivocabile, quali elementi fanno parte dell'insieme considerato e quali non vi appartengono. L'insieme dei numeri naturali compresi strettamente tra 1 e 5 ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$A = \{x \in \mathbb{N}: 1 < x < 5\}$$

Esempi:

1. L'insieme degli animali: $A = \{cane, gatto, elefante, \dots\}$
2. L'insieme delle materie del primo anno del corso di laurea in fisica: $B = \{analisi, fisica, chimica, \dots\}$

<u>Definizione</u>: Si dice ***insieme vuoto*** l'insieme che non contiene nessun oggetto e si indica con il simbolo $\emptyset$.

<u>Definizione</u>: Diremo che l'insieme *B* è un ***sottoinsieme*** dell'insieme *A* se tutti gli elementi di *B* sono anche elementi di *A* e si scrive $B \subseteq A$. Diremo che *B* è un ***sottoinsieme proprio*** di *A* se $B \subseteq A$ ed esiste almeno un elemento di *A* che non sta in *B*, in tal caso si scrive $B \subset A$.

<u>Definizione</u>: Due insiemi *A* e *B* si dicono ***uguali*** se contengono gli stessi identici elementi e si scrive $A = B$.

Osservazione: Per verificare che gli insiemi *A* e *B* sono uguali basta dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A \qquad (\textbf{\textit{principio di doppia inclusione}})$$

Osservazione: L'insieme vuoto è contenuto propriamente in ogni insieme, cioè $\emptyset \subset A$, per tale ragione prende il nome di sottoinsieme **banale** di A. Lo stesso vale per l'insieme A.

Osservazione: Anche se non viene sempre precisato, ogni insieme va considerato come il sottoinsieme di un insieme più generale: un insieme **universo**.

Definizione: Dato un insieme $A \subseteq B$, l'***insieme complementare di A rispetto a B*** è l'insieme formato da tutti gli elementi di B che non appartengono ad A e si indica con $\bar{A}$, cioè:

$$\bar{A} = \{x: x \in B \wedge x \notin A\}$$

Esempi:

- Dati l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'insieme P dei numeri pari, il complementare di P rispetto ad $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri dispari.
- Dato un insieme A, il complementare di A rispetto ad A è l'insieme vuoto; mentre il complementare dell'insieme vuoto rispetto ad A è A stesso:

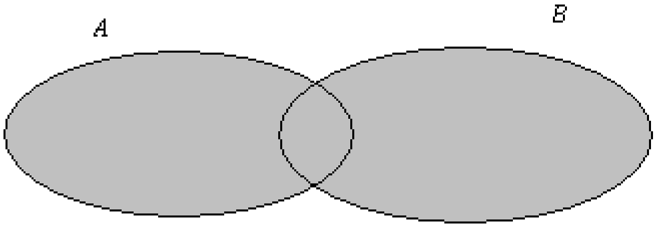
$$\bar{A} = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \bar{\emptyset} = A$$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

UNIONE

L'insieme ***unione*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad A o a B o ad entrambi e si indica con:

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$



L'unione di due insiemi, da un punto di vista logico, è formata dagli elementi che verificano la proprietà di un insieme *oppure* dell'altro, di conseguenza è definita dalla *disgiunzione*.

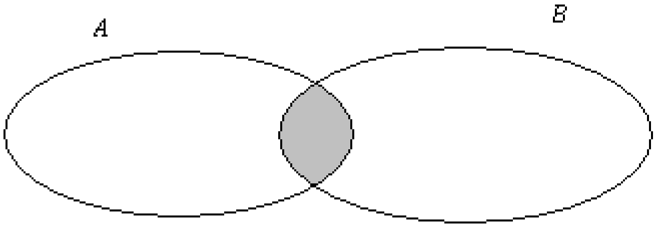
Proprietà dell'unione

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$

INTERSEZIONE

L'insieme ***intersezione*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B e si indica con:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



L'intersezione di due insiemi, da un punto di vista logico, è formato dagli elementi che verificano sia la proprietà di un insieme che quella dell'altro, di conseguenza è definita dalla *congiunzione*.

Definizione: Due insiemi si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione coincide con l'insieme vuoto, cioè:

$$A \cap B = \emptyset$$

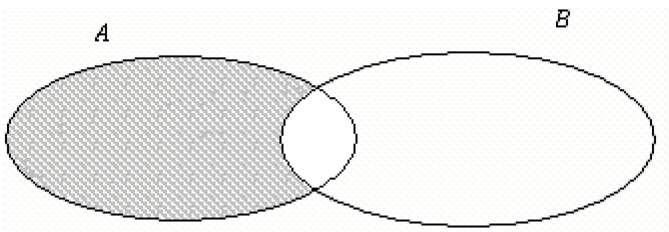
Proprietà dell'intersezione

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$

DIFFERENZA

L'insieme ***differenza*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad A e che non appartengono a B e si indica con:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



Esempio:

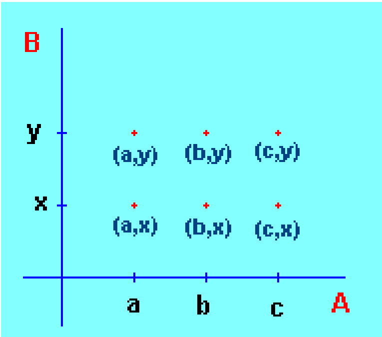
Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, l'insieme $A - B = \{3, 6, 9, 18\}$.

PRODOTTO CARTESIANO

Definizione: Dati due insiemi A e B (distinti o coincidenti) nell'ordine scritto, e fissati due elementi $x \in A$ e $y \in B$, si definisce ***coppia ordinata*** (x, y) una coppia avente come primo elemento $x \in A$ e come secondo elemento $y \in B$.

Definizione Si definisce ***prodotto cartesiano*** di A e B e si denota con $A \times B$, l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (x, y) e si scrive:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$



Se $A = B$ il prodotto cartesiano $A \times A$ si può anche indicare con A^2. Questa definizione si può estendere a un numero finito qualsiasi di insiemi.

Esempio:

Siano date due rette ortogonali in un piano tali che $A = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della prima retta e $B = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della seconda, allora $A \times B = \mathbb{R}^2$ è rappresentato dall'insieme dei punti (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$, del piano considerato.

INSIEME DELLE PARTI

Definizione: Si definisce ***insieme delle parti*** dell'insieme A l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi, banali e non, dell'insieme A:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

È bene osservare che gli elementi dell'insieme delle parti sono tutti sottoinsiemi di A, compresi quelli banali.

Esempio:

Sia $A = \{a, b, c\}$, l'insieme delle parti di A è dato dall'insieme:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Si dimostra che se l'insieme A è costituito da n elementi, allora il suo insieme delle parti è costituito da 2^n elementi.

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI

L'insieme $\mathbb{N}$ dei ***numeri naturali*** è dato da:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

Ogni numero naturale si costruisce a partire dal primo, lo zero, al quale si aggiunge via via 1. Di conseguenza ogni numero costruito è sempre maggiore di tutti i suoi precedenti e quindi i numeri naturali sono ***ordinati*** tramite una relazione d'ordine, che si rappresenta tramite il simbolo di disuguaglianza $\leq$, o disuguaglianza stretta $<$.
Il numero naturale $n+1$, costruito a partire da n, si chiama ***successivo*** di n, mentre il numero naturale $n-1$ si chiama ***precedente*** di n.
Per i numeri naturali è sempre possibile effettuare il confronto tra due qualsiasi n, m di essi cioè si verifica uno solo dei seguenti tre casi:

$$n > m, \qquad n < m, \qquad n = m \qquad (\boldsymbol{legge\ di\ tricotomia})$$

L'ordinamento dei numeri naturali ha la caratteristica che ogni numero possiede un immediato successivo: 2 è il successivo di 1, 3 è il successivo di 2, etc. Ciò significa che l'insieme $\mathbb{N}$ è ***ordinato in maniera discreta***.

Riassumendo: $\mathbb{N}$ è un insieme ***infinito***, ***totalmente ordinato*** e ***discreto***.

OPERAZIONI IN $\mathbb{N}$

Nell'insieme dei numeri naturali si introducono le seguenti operazioni numeriche di somma e prodotto. Esse sono operazioni interne all'insieme dei numeri naturali, nel senso che sommando o moltiplicando due qualsiasi elementi di $\mathbb{N}$, si ottiene ancora un elemento di $\mathbb{N}$. Sono operazioni sempre possibili ed a risultato unico, cioè hanno come risultato un ben determinato numero naturale. Lo stesso <u>non</u> vale per la sottrazione e per la divisione: infatti la sottrazione è interna solamente quando il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo, mentre la divisione è interna solo quando il dividendo è un multiplo del divisore.

Per le operazioni di somma e prodotto tra numeri naturali valgono le seguente proprietà:

commutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
associativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributiva[1]	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Per la moltiplicazione vale, inoltre, la **legge di annullamento del prodotto:**

$$\boldsymbol{a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0}$$

il prodotto è nullo se è nullo almeno uno dei due fattori.

[1] della moltiplicazione rispetto all'addizione

Massimo Comun Divisore (***M.C.D.***): il più grande tra tutti i divisori comuni ai numeri considerati;

Regola per il calcolo del M.C.D. : Per calcolare il M.C.D. di due o più numeri naturali si scompongono questi ultimi in fattori primi e si moltiplicano tra loro i fattori comuni, considerati una sola volta, con il minore esponente.

Definizione: Due numeri $a, b \in \mathbb{N}$ si dicono ***primi tra loro o coprimi*** se $MCD(a, b) = 1$.

Minimo Comune Multiplo (***m.c.m.***): il più piccolo tra i multipli comuni ai numeri considerati.

Regola per il calcolo del m.c.m. : Per calcolare il m.c.m. di due o più numeri naturali si scompongono questi ultimi in fattori primi e si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, considerati una sola volta, con il maggiore esponente.

NUMERI INTERI $\mathbb{Z}$

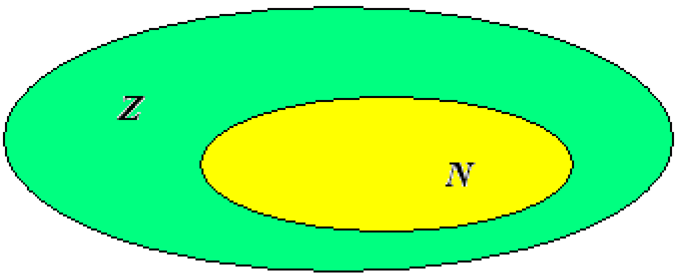
L'insieme $\mathbb{Z}$ dei ***numeri interi*** è dato da:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -z, \dots - 4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots, +z, \dots\}$$

È possibile che tale insieme risulta ripartito nei tre sottoinsiemi:

- $\{0\}$ formato dal solo 0;
- $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots, -z, \dots\}$ formato dai numeri interi negativi;
- $\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +\ 3+, 4, \dots, +z, \dots\}$ formato dai numeri interi positivi.

In questo modo possiamo vedere i numeri naturali come un sottoinsieme dei numeri interi[2].



Anche l'insieme dei numeri interi è ***infinito*** e ***totalmente ordinato***; inoltre è ***ordinato in modo discreto***. A differenza di $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{Z}$ non possiede un ***primo elemento***.

[2] A meno di isomorfismo.

OPERAZIONI IN $\mathbb{Z}$

Nell'insieme dei numeri interi si introducono le seguenti operazioni numeriche di somma, prodotto e differenza. Tali operazioni sono interne all'insieme dei numeri interi, nel senso che sommando, sottraendo o moltiplicando due qualsiasi numeri relativi, si ottiene ancora un elemento di $\mathbb{Z}$.
Lo stesso non vale per la divisione, che risulta essere interna solo quando il dividendo è un multiplo del divisore.

NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei ***numeri razionali*** è costituito da:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

La scrittura $\frac{m}{n}$ prende il nome di ***frazione***, il termine m si chiama ***numeratore***, mentre il termine n prende il nome di ***denominatore***. Ogni frazione indica la divisione tra i numeri m e n.

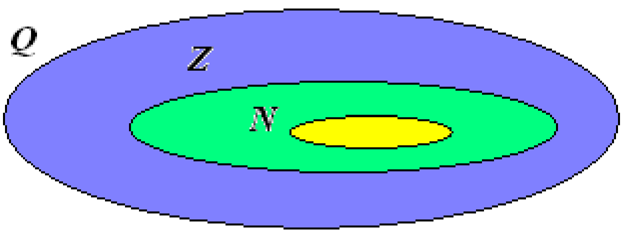
Osservazione: Una frazione è nulla se, e soltanto se, il suo numeratore è nullo:

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$$

<u>Non ha senso parlare di frazioni aventi il denominatore uguale a zero</u>!

<u>Definizione</u>: Si definisce ***inversa*** o ***reciproca*** di una frazione non nulla $\frac{a}{b}$ la frazione $\frac{b}{a}$, tale che:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$



LE FRAZIONI

<u>Definizione</u>: Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono ***equivalenti*** quando esprimono lo stesso rapporto, cioè quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ovvero quando sono uguali i prodotti incrociati, cioè: $ad = cb$.

Esempio:

Le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ esprimono tutte lo stesso rapporto, cioè 2.

Definizioni: Una frazione si dice ***propria*** quando il numeratore è minore del denominatore, ***impropria*** quando il numeratore è maggiore del denominatore, ***apparente*** quando il numeratore è uguale al denominatore o è un suo multiplo.

Esempi:

La frazione $\frac{1}{2}$ è una frazione propria; la frazione $\frac{3}{2}$ è una frazione impropria; la frazione $\frac{14}{7}$ è invece apparente.

RIDUZIONE AI MINIMI TERMINI

Per ridurre una frazione $\frac{m}{n}$ ai minimi termini basta dividere sia il numeratore che il denominatore per il $M.C.D.(m,n)$, ottenendo così la nuova frazione irriducibile:

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m: M.C.D.(m,n)}{n: M.C.D.(m,n)}$$

SOMMA DI DUE FRAZIONI

Per poter effettuare la somma di due frazioni è necessario *ridurle allo stesso denominatore*. Per fare ciò si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, si divide tale m.c.m. per i vari denominatori e si moltiplicano tali risultati per i numeratori. La somma di quest'ultimo ci dà il numeratore della frazione somma, mentre il m.c.m. è il denominatore della frazione somma.

Esempio:

Vogliamo effettuare la somma: $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$. Schematizziamo di seguito i passi sopra descritti:

- $m.c.m.(2,7) = 14;$
- $12:2 = 7 \qquad 14:7 = 2;$
- $7 \cdot 1 = 7 \qquad 2 \cdot 3 = 6;$
- $\frac{7+6}{14} = \frac{13}{14}.$

CONFRONTO TRA FRAZIONI

Per confrontare due o più frazioni è necessario *ridurle allo stesso denominatore* e confrontare tra loro i numeratori.

Esempio:

Si vogliono confrontare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{7}$. Riducendole allo stesso denominatore otteniamo le frazioni ad esse equivalenti: $\frac{21}{28}$ e $\frac{4}{28}$ ed è semplice stabilire che la prima frazione è maggiore della seconda.

ORDINAMENTO DENSO DI $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali, così come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, è infinito e totalmente ordinato, ma non è discreto, cioè non si può determinare il successivo di un numero razionale.
Ciò si formalizza dicendo che: *dati due numeri razionali è sempre possibile trovare un numero razionale che segue il primo e precede il secondo, ovvero esiste sempre un numero razionale intermedio*.

Tale fatto si esprime dicendo che l'insieme $\mathbb{Q}$ è ***ordinato in maniera densa***.

Esempio:

Date le frazioni $\frac{1}{7}$ e $\frac{3}{4}$ è possibile trovare infinite frazioni fra esse. Una di queste è la loro media aritmetica[3], cioè:

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{56}$$

e quindi si ha che:

$$\frac{1}{7}<\frac{25}{56}<\frac{3}{4}$$

POTENZA CON ESPONENTE NATURALE

Definizione: Si definisce ***potenza*** di base a ed esponente $n \in \mathbb{N}$, la moltiplicazione di a per se stesso *n – volte*, cioè:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-volte}$$

Esempi:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
b) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
c) $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

Osservazione: In base alla definizione di potenza è semplice capire che se l'esponente è un numero pari, allora la potenza è un numero positivo a prescindere dalla base, in quanto se si moltiplicano un numero pari di fattori negativi si ottiene un prodotto positivo; se l'esponente è dispari, allora la potenza è un numero positivo se la base è positiva, un numero negativo se la base è negativa.

[3] Si ricordi che la *media aritmetica* di due numeri x_1 e x_2 è il valore $m = \frac{x_1+x_2}{2}$.

esponente / base	pari	dispari
positiva	+	+
0	0	0
negativa	+	-

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1. ***Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti***:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. ***Il rapporto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti***:

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \;\; con \;\; a \neq 0$$

3. ***La potenza di una potenza è una potenza avente la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti***:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. ***Il prodotto di due potenze aventi lo stesso esponente e basi diverse è una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente***:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

5. ***Il rapporto di due potenze aventi lo stesso esponente e basi diverse è una potenza avente per base il rapporto delle basi e per esponente lo stesso esponente***:

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \;\; con \;\; b \neq 0$$

POTENZA CON ESPONENTE INTERO

Dalle precedenti proprietà delle potenze segue, per esempio, che:

$$5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

e, generalizzando, si ha:

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ci poniamo adesso la seguente domanda:

"Ha senso l'espressione $\mathbf{0^0}$***?"***

Per rispondere facciamo riferimento alla proprietà appena utilizzata:

$$0^0 = 0^{m-m} = 0^m : 0^m = 0 : 0$$

e sappiamo bene che non è possibile dividere per zero. Di conseguenza l'espressione è priva di senso.

Effettuiamo adesso la divisione delle potenze 3^2 e 3^4 nei due modi seguenti:

- $3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2}$;
- $3^2 : 3^4 = \dfrac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3} = \dfrac{1}{3^2}$;

dall'uguaglianza otteniamo che:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

In generale si ha:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Osservazione: Non è ridondante evidenziare che la scrittura 0^{-n} è priva di significato.

Nel caso di una potenza avente come base una frazione ed esponente negativo si avrà:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}}$$

Le proprietà delle potenze ad esponente naturale si possono estendere al caso delle potenze ad esponente intero con i dovuti accorgimenti!

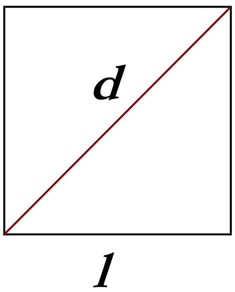
NUMERI REALI

La necessità di introdurre i numeri reali nasce dall'esigenza di poter risolvere equazioni del tipo:

$$x^2 = 2$$

Anticamente si pensava che tutti i segmenti fossero *commensurabili*, cioè che il rapporto tra le lunghezze di due segmenti qualsiasi fosse esprimibile mediante un numero razionale. Tale concezione entrò in crisi quando i Greci si accorsero del fatto che il rapporto tra la lunghezza della diagonale di un quadrato e la lunghezza del suo lato non è esprimibile mediante un numero razionale, bensì:

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$



Erasmo Modica, 2007/2008
www.galois.it

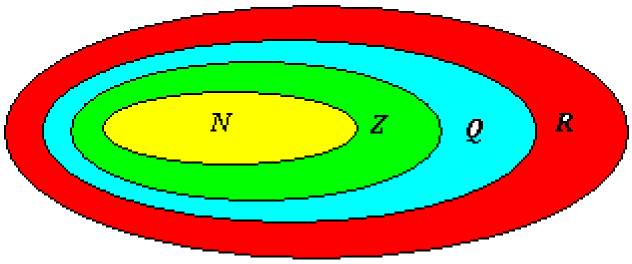
I *Pitagorici* dimostrarono che il numero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioè che non esiste alcun numero il cui quadrato è pari a 2.

Definizione: L'insieme dei numeri che non sono razionali prende il nome di insieme dei ***numeri irrazionali*** e si indica con il simbolo $\mathbb{Q}^c$.

Esempi:

Un esempio di numero irrazionale è π.

Definizione: L'unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali prende il nome di insieme dei ***numeri reali*** e si indica con il simbolo $\mathbb{R}$.



CARATTERISTICHE DI $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali risulta essere un'estensione dell'insieme dei numeri razionali. È anch'esso un insieme ***infinito*** e ***totalmente ordinato***; inoltre è ***denso*** come $\mathbb{Q}$, ma rispetto a quest'ultimo completa la retta. Per tale ragione quando si rappresentano i numeri reali si parla spesso di "*retta reale*".

Tale identificazione è lecita in quanto esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti appartenenti ad una retta orientata, intendendo per retta orientata quella retta in cui è stato fissato un verso di percorrenza.