UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

CORSO ZERO DI MATEMATICA

"*ESPONENZIALI E LOGARITMI*"

Dr. Erasmo Modica
erasmo@galois.it
www.galois.it

POTENZA CON ESPONENTE REALE

Definizione: Dati un numero reale $a > 0$ ed un numero reale x qualunque, si definisce ***potenza con esponente reale*** del numero a il numero reale a^x.

Osservazione: Questa potenza risulta essere sempre un numero reale positivo!

PROPRIETÀ DELLE POTENZE CON ESPONENTE REALE

1. Se $a > 1$ e $x < y$, allora $a^x < a^y$.
2. Se $0 < a < 1$ e $x < y$, allora $a^x > a^y$.
3. $a^x b^x = (ab)^x \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $a^x a^y = a^{x+y} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. $(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
6. $a^x : a^y = a^{x-y} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
7. $a^x : b^x = (a : b)^x \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempi:

1. $5^{\sqrt{8}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{8}+\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 5^{3\sqrt{2}}$
2. $(5:7)^{\pi} = 5^{\pi} : 7^{\pi}$
3. $5^{\sqrt{2}} < 5^{\sqrt{3}}$
4. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sqrt{3}}$

Teorema: *Se a è un numero positivo diverso da 1, allora la potenza a^x assume una sola volta tutti i valori positivi. Cioè: qualunque sia $a > 0$, $a \neq 1$, e qualunque sia $b > 0$, esiste un (unico) numero x tale che $a^x = b$.*

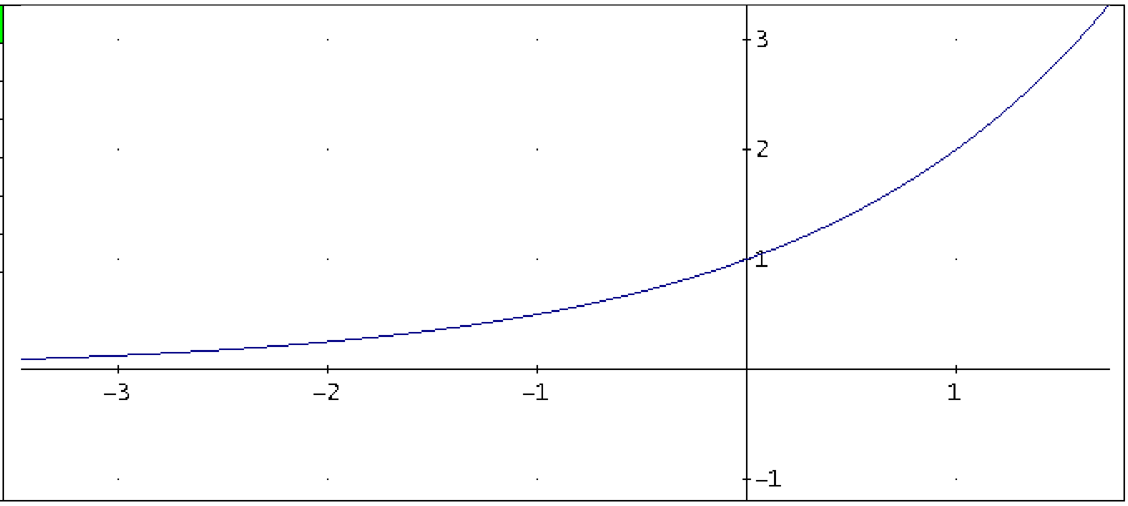
GRAFICO ESPONENZIALE

Vogliamo studiare il comportamento della relazione di dipendenza $y = a^x$ al variare di $a \in \mathbb{R}^+$. Per fare ciò distinguiamo i due seguenti casi.

I CASO: $a > 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = 2$.

x	**y**
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8



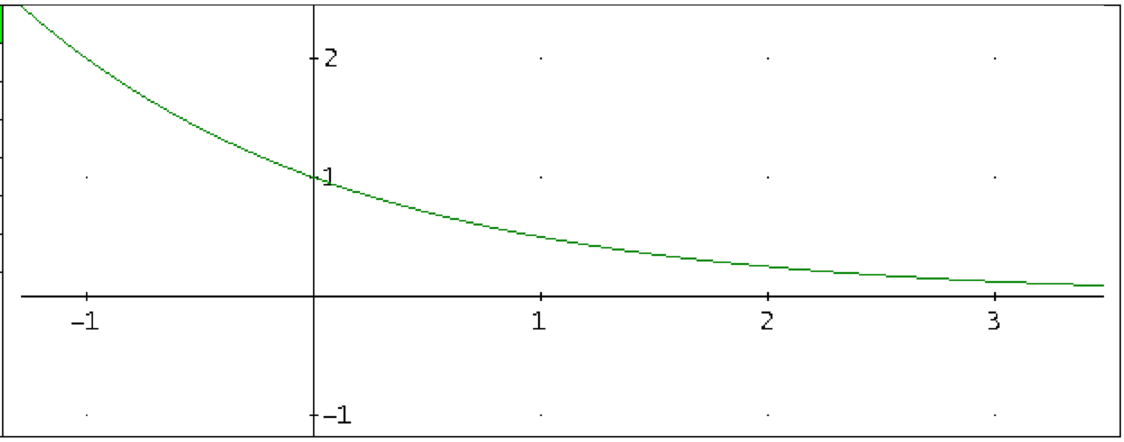
Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x \geq 0$;
- vale la proprietà di crescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$.

II CASO: $0 < a < 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = \frac{1}{2}$.

x	**y**
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- ogni valore di x ha un corrispondente y;
- i valori del corrispondente y sono tutti positivi, cioè $a^x \geq 0$;
- vale la proprietà di decrescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}$.

LOGARITMI

Il teorema precedente ci permette di stabilire che dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione si chiama logaritmo di b in base a e si indica con:

$$\log_a b$$

<u>Definizione</u>: Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama ***logaritmo in base a del numero b*** l'unica soluzione dell'equazione $a^x = b$, cioè quell'unico numero α, che dato come esponente ad a, rende la potenza a^α uguale a b.

Pertanto le scritture:

$$\alpha = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^\alpha = b$$

sono equivalenti.

Il numero b si chiama ***argomento*** del logaritmo e deve essere un numero positivo.

Osservazione: La definizione di logaritmo permette di affermare che ogni numero reale positivo b si può scrivere, in modo unico, come potenza di un altro qualsiasi numero a positivo, diverso da 1.

È infatti:

$$b = a^{\log_a b}$$

In altre parole ogni numero $b > 0$ si può pensare come potenza di base prefissata, qualsiasi, positiva e diversa da 1.

Esempi:

1. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right) = 3$, perché è $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
2. $\log_5 1 = 0$ perché è $5^0 = 1$.
3. $\log_7 7 = 1$ perché è $7^1 = 7$.
4. $\log_7(-7) = ?$ non esiste perché $b = -7$ non è positivo.
5. $\log_1 7$ non ha significato perché, secondo la definizione, la base deve essere diversa da 1. Infatti l'equazione $1^x = b$ è impossibile (se $b \neq 1$), indeterminata (se $b = 1$), inoltre la potenza a^x è definita per $a \geq 0$; l'equazione $0^x = b$, come sappiamo è impossibile se $b \neq 0$ reale ed indeterminata se $b = 0$.
6. $\log_{(-3)} 7$ e $\log_0 7$ non hanno significato perché, secondo la definizione, la base deve essere positiva (i logaritmi di numeri negativi sono numeri immaginari).

PROPRIETÀ GENERALI

1. Il $\log_a b$ è positivo se:

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases}$$

2. Il $\log_a b$ è negativo se:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > 1 \end{cases}$$

3. $\log_a a = 1$ perché è $a^1 = a$.
4. $\log_a 1 = 0$ perché è $a^0 = 1$.
5. Se due numeri sono eguali, anche i loro logaritmi (rispetto alla stessa base) sono eguali; e viceversa.
6. Se la base *a* è maggiore di 1, al crescere del numero *b*, cresce anche il logaritmo di questo.
7. Se la base *a* è minore di 1, al crescere del numero *b*, il logaritmo decresce.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL LOGARITMO

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a\left(x^n\right) = n \log_a x$
4. $\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \log_a b$

Queste regole trasformano le quattro operazioni di moltiplicazione, di divisione, di elevazione a potenza di esponente *n* e di estrazione di radice di indice *n* sopra numeri positivi assegnati, rispettivamente, nelle operazioni di addizione, di sottrazione, moltiplicazione per *n* e divisione per *n* sopra i logaritmi dei numeri assegnati.
Si tenga presente che per poter applicare le proprietà 1 e 2 i singoli numeri *x* e *y*, dei quali si considerano i logaritmi, devono essere positivi, e non soltanto deve essere positivo il loro prodotto xy o il loro quoziente $\frac{x}{y}$.

Osservazione: Non vi sono, invece, regole analoghe riguardo alla somma e alla differenza: il logaritmo di una somma o di una differenza non è esprimibile mediante i logaritmi dei suoi singoli termini.

SIMBOLISMO	
e	**numero di Nepero** è un numero irrazionale che vale (a meno di 10^{-5}) 2,71828
lnN	**logaritmo naturale o neperiano** (cioè a base *e*) di un numero positivo *N*
LogN	**logaritmo decimale** (cioè in base 10) di un numero positivo *N*

Siccome esistono infiniti sistemi di logaritmi (poiché infinite sono le possibili basi $a > 1$), per passare da una base *a* ad un'altra *b* basta applicare la seguente formula:

$$\log_b N = \frac{\log_a B}{\log_a b}$$

Esercizio: Sapendo che $\log_{ab} a = 4$, calcolare $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

Si ha:

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3}\log_{ab} a - \frac{1}{2}\log_{ab} b = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\log_{ab} b.$$

Resta da calcolare $\log_{ab} b$. Poiché:

$$1 = \log_{ab} ab = \log_{ab} a + \log_{ab} b = 4 + \log_{ab} b$$

segue che $\log_{ab} b = -3$; pertanto:

$$\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\log_{ab} b = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-3) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

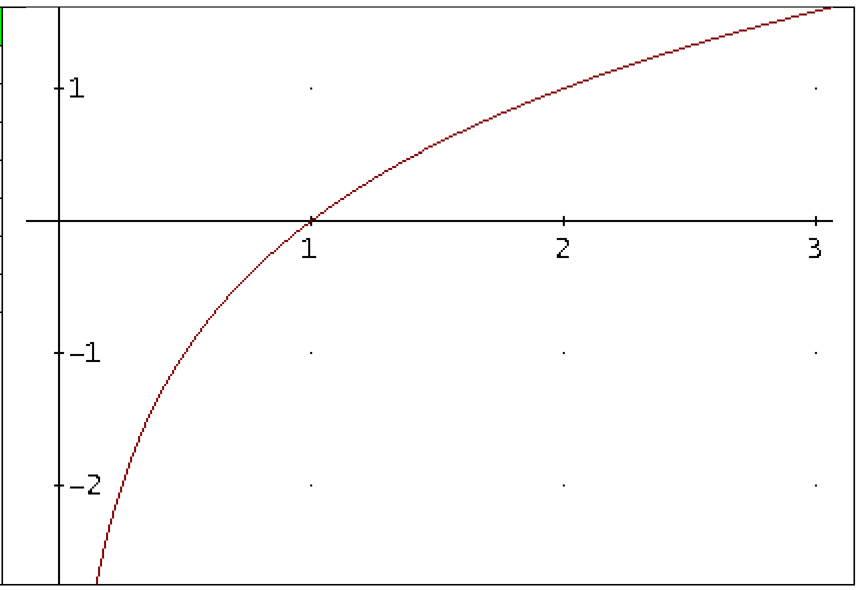
GRAFICO DEL LOGARITMO

Vogliamo studiare il comportamento della relazione di dipendenza $y = \log_a x$ al variare di $a \in \mathbb{R}^+$. Per fare ciò distinguiamo i due seguenti casi.

I CASO: $a > 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = 2$.

x	***y***
1	0
0,5	-1
0,25	-2
2	1
3	1,58496
4	2
5	2,32193
6	2,58496



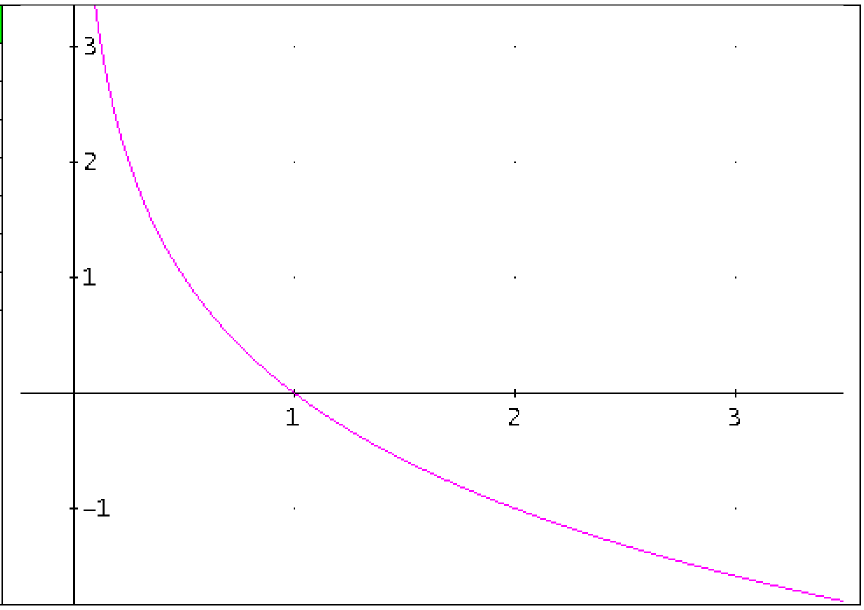
Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- i valori di x che ammettono un corrispondente sono solo $x \in \left]0, +\infty\right[$;
- i valori della y sono positivi per $x > 1$ e negativi per $0 < x < 1$;
- vale la proprietà di crescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \left]0, +\infty\right[$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$.

II CASO: $0 < a < 1$

Per fissare le idee consideriamo $a = \dfrac{1}{2}$.

x	***y***
1	0
0,5	1
0,25	2
2	-1
3	-1,585
4	-2
5	-2,3219
6	-2,585



Dall'analisi della tabella e del grafico possiamo dedurre che:

- i valori di x che ammettono un corrispondente sono solo $x \in \left]0, +\infty\right[$;
- i valori della y sono negativi per $x > 1$ e positivi per $0 < x < 1$;
- vale la proprietà di decrescenza, cioè: $\forall x_1, x_2 \in \left]0, +\infty\right[$, con $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad \log_a x_1 > \log_a x_2$.

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Definizione: Si definisce ***equazione esponenziale*** ogni equazione in cui l'incognita compare all'esponente di una o più potenze.

Il caso più semplice di equazione esponenziale è l'equazione esponenziale ***elementare***:

$$a^x = b$$

con $a > 0$.

Osservazione: Nell'insieme dei numeri reali l'equazione $a^x = b$ può avere soluzioni solo se $a > 0$ e $b > 0$ (se $a = 0$, allora $0^x = 0$ per ogni $x > 0$ e quindi l'equazione $0^x = b$ è impossibile se $b \neq 0$ e indeterminata se $b = 0$); infatti:

1. il primo membro di $a^x = b$ ha significato solo se *a* è positivo;
2. inoltre a^x risulta sempre positivo per qualsiasi valore di *x* pertanto l'equazione può avere soluzioni soltanto se anche *b* è positivo.

Esempi:

1. Se $a = 1$ e $b = 1$ l'equazione diventa $1^x = 1$ che è un'identità.
2. Se $a = 1$ e $b \neq 1$ l'equazione diventa $1^x = b \neq 1$ che è impossibile.
3. Se $a \neq 1$ e $b = 1$ l'equazione diventa $a^x = 1$ che ammette come soluzione $x = 0$ poiché $a^0 = 1$.

Per tutti gli altri casi in cui *a* e *b* sono entrambi positivi, con $a \neq 1$, vale il seguente:

Teorema: *Dati due numeri reali positivi a e b, con* $a \neq 1$*, l'equazione esponenziale:*

$$a^x = b$$

ammette una e una sola soluzione.
Tale soluzione è:

- *positiva, se a e b sono entrambi maggiori di 1, o entrambi minori di 1;*
- *negativa, se dei due numeri a e b uno è maggiore di 1 e l'altro è minore di 1*;
- *uguale a zero, se* $b = 1$ *e* $a > 0$.

Esempi:

1. $3^x = \frac{1}{9}$ ha come soluzione $x = -2$.
2. $3^x = -9$ non ha soluzioni.
3. $(-3)^x = 9$ non ha significato.

EQUAZIONI ESPONENZIALI RIDUCIBILI AD UGUAGLIANZE DI DUE POTENZE AVENTI LA STESSA BASE

La risoluzione di tali equazioni è semplice in quanto si passa dall'uguaglianza di due potenze all'uguaglianza dei loro esponenti, cioè:

$$a^x = a^y \qquad \rightarrow \qquad x = y$$

Esempi:

1. Per risolvere l'equazione esponenziale $3^{2x} = \frac{1}{81}$, basta riscrivere l'equazione come $3^{2x} = 3^{-4}$ e porre $2x = -4 \quad \rightarrow \quad x = -2$.
2. Per risolvere l'equazione esponenziale $\frac{2^{x^2}}{32^x} - 64 = 0$, basta riscrivere l'equazione come $2^{x^2-5x} = 2^6$ e porre $x^2 - 5x = 6$, da cui si ricava che $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

EQUAZIONI ESPONENZIALI RIDUCIBILI AD EQUAZIONI ALGEBRICHE MEDIANTE L'USO DI UN'INCOGNITA SUPPLEMENTARE

Esempi:

1. Risolvere l'equazione esponenziale $16 - 10 \cdot 2^x + 2^{2x} = 0$.

   Poniamo $2^x = z$ e otteniamo:

$$z^2 - 10z + 16 = 0$$

   le cui soluzioni sono $z_1 = 2$ e $z_2 = 8$. Quindi:

   - $2^x = 2 \qquad \rightarrow \qquad x = 1;$
   - $2^x = 2^3 \qquad \rightarrow \qquad x = 3.$

2. Risolvere l'equazione esponenziale $\frac{1-3^{-x}}{8} = 9^{1-x}$.

   L'equazione diventa:

$$1 - \frac{1}{3^x} = 8 \cdot \frac{9}{9^x} \qquad \rightarrow \qquad 1 - \frac{1}{3^x} = \frac{72}{3^{2x}}$$

   Poniamo $\frac{1}{3^x} = z$ e otteniamo $1 - z = 72z^2$, da cui si ottiene che $z_1 = \frac{1}{9}$ e $z_2 = -\frac{1}{8}$. Quindi:

   - $\frac{1}{3^x} = \frac{1}{9} \qquad \rightarrow \qquad 3^{-x} = 3^{-2} \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 2$

- $\frac{1}{3^x} = -\frac{1}{8}$ $\rightarrow$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{1}{8}$ $\rightarrow$ impossibile!

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione: Si dice ***equazione logaritmica*** un'equazione in cui compare il logaritmo dell'incognita o il logaritmo di un'espressione contenente l'incognita.

Nella risoluzione di un'equazione logaritmica si cerca, mediante l'uso delle proprietà dei logaritmi, di ricondurre tutto alla forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono espressioni algebriche contenenti l'incognita x.
Dall'uguaglianza precedente segue che i valori della x che la verificano, devono verificare anche l'equazione $A(x) = B(x)$.

Osservazione: **Attenzione**! Non vale il viceversa, cioè le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$ può non essere soluzione dell'equazione $\log_a A(x) = \log_a B(x)$.

Per risolvere tali equazioni si pone, quindi, $A(x) = B(x)$ e si vede se le soluzioni trovate soddisfano l'equazione di partenza.

Esempi:

1. Risolvere l'equazione $\log(2x-1) = \log(x+3)$.

   Imponendo la condizione di esistenza dei logaritmi si deve avere:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases}$$

   cioè $x > \frac{1}{2}$. Uguagliando gli argomenti si ha:

$$2x-1 = x+3 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

   che è una soluzione accettabile in quanto $4 > \frac{1}{2}$.

2. Risolvere l'equazione $\log\left(x^2-6\right)=\log\left(5x+8\right)$.

   Uguagliando gli argomenti si ha:

$$x^2-6=2x+8 \qquad \rightarrow \qquad x^2-5x-14=0 \qquad \rightarrow \qquad x_1=7,\ x_2=-2$$

   La soluzione $x=7$ è l'unica accettabile in quanto per $x=-2$ i due logaritmi perdono di significato.

3. Risolvere l'equazione $15^x=7$.

   Passando ai logaritmi si ha:

$$\log 15^x=\log 7 \qquad \rightarrow \qquad x\cdot\log 15=\log 7 \qquad \rightarrow \qquad x=\frac{\log 7}{\log 15}$$

4. Risolvere l'equazione $7,5^x=13,21$.

   Passando ai logaritmi si ha:

$$\log 7,5^x=\log 13,21 \qquad \rightarrow \qquad x\cdot\log 7,5=\log 13,21 \ \rightarrow \qquad x=\frac{\log 13,21}{\log 7,5}\approx 1,28$$

5. Risolvere l'equazione $5^{3x}+5^{3x+2}=7^{2x+1}+7^{2x}$

   Si ha:

$$5^{3x}\left(1+5^2\right)=7^{2x}\left(7+1\right) \qquad \rightarrow \qquad 26\cdot 5^{3x}=8\cdot 7^{2x} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{125}{49}\right)^x=\frac{4}{13}$$

   Quindi si ha:

$$x=\frac{\log\frac{4}{13}}{\log\frac{125}{49}}=\frac{\log 4-\log 13}{\log 125-\log 49}$$

6. Risolvere l'equazione $x^{\mathrm{Log}x}=10$.

   Passando ai logaritmi si ha:

$$\left(\mathrm{Log}x\right)\left(\mathrm{Log}x\right)=\mathrm{Log}10 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{Log}^2 x=1 \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{Log}x=\pm 1$$

   E quindi:

$$x_2=10 \ \text{ e } \ x_2=\frac{1}{10}$$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Definizione: Una disequazione si dice ***esponenziale*** se in essa l'incognita, o qualche espressione contenente l'incognita, compare come esponente di una o più potenze.

Prima di passare ai metodi di risoluzione di tali disequazioni, ricordiamo alcuni risultati già discussi in precedenza.

ESPONENZIALI

$a>0$	a^x è un numero reale positivo $\forall x \in \mathbb{R}$		
$a>1$	$a^x > a^y$	$\rightarrow$	$x>y$
	$a^x < a^y$	$\rightarrow$	$x<y$
$0<a<1$	$a^x > a^y$	$\rightarrow$	$x<y$
	$a^x < a^y$	$\rightarrow$	$x>y$

LOGARITMI

$a>1$	$x>y$	$\rightarrow$	$\log_a x > \log_a y$
	$x<y$	$\rightarrow$	$\log_a x < \log_a y$
$0<a<1$	$x>y$	$\rightarrow$	$\log_a x < \log_a y$
	$x<y$	$\rightarrow$	$\log_a x > \log_a y$

DISEQUAZIONI RIDUCIBILI A DISUGUAGLIANZE DI DUE POTENZE DI UGUAL BASE

Sono delle disequazioni che si presentano in una delle forme:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

In questo caso si ha:

$a>1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)>g(x)$
	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)<g(x)$
$0<a<1$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)<g(x)$
	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$\rightarrow$	$f(x)>g(x)$

Esempi:

1. Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

   In base alla precedente tabella è facile notare che ci si trova nel caso in cui $0<a<1$ e quindi si ha che $x>3$.

2. Risolvere la disequazione $\pi^x < \pi^7$
   In base alla precedente tabella è facile notare che ci si trova nel caso in cui $a > 1$ e quindi si ha che $x < 7$.

DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON L'UTILIZZO DI UN'INCOGNITA AUSILIARIA

Esempio: Risolvere la disequazione esponenziale

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 > 0$$

Riscriviamo come segue la disequazione:

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 > 0$$

e poniamo $2^x = z$, ottenendo così:

$$z^2 - 6z + 8 > 0$$

Le soluzioni di questa disequazione sono:

$$t < 2 \vee t > 4$$

e quindi si ha:

- $2^x < 2 \quad \rightarrow \quad x < 1$;
- $2^x > 4 \quad \rightarrow \quad x > 2$.

DISEQUAZIONI RISOLUBILI CON L'UTILIZZO DEI LOGARITMI

Per risolverle basta applicare ad ambo i membri della disequazione:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} < b^{g(x)}$$

i logaritmi, facendo attenzione alla base del logaritmo considerato. Infatti si hanno i due casi:

<u>1° caso</u>: $c > 1$

– $a^{f(x)} < b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a < g(x) \cdot \log_c b$
– $a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a > g(x) \cdot \log_c b$

<u>2° caso</u>: $0 < c < 1$

– $a^{f(x)} < b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a > g(x) \cdot \log_c b$
– $a^{f(x)} > b^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot \log_c a < g(x) \cdot \log_c b$

Esempi:

1. $3^x > \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x \cdot \log_3 3 > \log_3 \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad x > -2$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \quad \rightarrow \quad x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 8 \quad \rightarrow \quad x < -3$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione: Una disequazione si dice ***logaritmica*** se in essa compare o il logaritmo dell'incognita, o il logaritmo di un'espressione contenente l'incognita.

DISEQUAZIONI DELLA FORMA:	$\log_a A(x) < b$	$\log_a A(x) > b$

Per risolvere tali disequazioni è necessario considerare i seguenti casi.

I caso: $a > 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) > a^b \end{cases}$$

II caso: $0 < a < 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) > a^b \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) < a^b \end{cases}$$

Esempio:

La disequazione $\log_{10}\left(2x^2 - 7x + 103\right) > 2$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 103 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 103 > 10^2 = 100 \end{cases}$$

DISEQUAZIONI DELLA FORMA: $\log_a A(x) < \log_a B(x)$ $\qquad$ $\log_a A(x) > \log_a B(x)$

Per risolvere tali disequazioni è necessario considerare i seguenti casi.

I caso: $a > 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$$

II caso: $0 < a < 1$

Le disequazioni si trasformano nei sistemi:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

Esempio:

La disequazione $\log_3(3x+1) \geq \log_3(2-x)$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 2-x > 0 \\ 3x+1 \geq 2-x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x > -1/3 \\ x < 2 \\ x \geq 1/4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \leq x < 2$$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni esponenziali.

$2^x = 64$	$\sqrt[x]{27}\cdot 3^x = 27\cdot\sqrt[x]{3}$	$4^{4-x}\cdot 4^{x+7} = 4^{x^2-4x-10}$	$3\cdot 4^{2x^2-2x+4} - 5\cdot 4^{2x^2-2x+4} = 28$
$4^x = \frac{1}{64}$	$3^{x^2-4x+5} = 3^{5-4x}$	$3^{x+1} + \frac{3^{2x-1}}{\sqrt{3^{2x-2}}} = 9\cdot 2^x$	$\frac{3^{x-1}}{3} + \frac{3^{x+1}}{3} + 3^{x+2} - 3^{x+1} = 64$
$8^{2x} = \frac{1}{4}$	$17^{x^4-13x^2+36} = 1$	$\left(a^{-x}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$	$5^{x+4} - 5\cdot 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5\cdot 5^{x+2}$
$\left(\frac{1}{6}\right)^{3x-7} = 6^{7x-3}$	$5^{1+x} + \frac{5}{5^x} = 26$	$2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} = 4$	$5^{2x} - 5^{x+1} = 5\left(5^{x-1} - 1\right)$
$2^{\frac{x+1}{2}} = 2^{2x}$	$\frac{2^{5x}}{4} = 8^{\frac{2x-1}{3}}$	$3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$	$12^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} + 144\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x = 337$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche.

$\frac{1}{2}\log(3x+5) + \frac{1}{2}\log x = 1$	$\log 4x - \log(x+2) = \log(3x-2) - \log x$
$\log(x+1) = \log 2 - \log 3$	$\log(7-x) - \log\left(2x^2 - 11x\right) = -\log x$
$\frac{1}{3}\log\left(x^3+1\right) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right)$	$\log(x+1) + \log(x-3) = \log(1-2x) + \log(x+3)$
$2 + \log\frac{1}{100} + \log x = \frac{1}{2}\log(x+2)$	$\log\left(3x^2+7x+4\right) - \log 2(x+1) = \log\left(3x^2+3x+3\right) - \log 2x$
$2^{3x+1} = 3^{x-1}$	$\log_4 x = \frac{1}{2}$
$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$	$\log\sqrt{x} = 1 - \log 5$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Risolvere nell'insieme ℝ le seguenti disequazioni esponenziali.

$3^{x+2}+3^{2-x}<30$	$4^{x}-3\cdot 2^{2}+2<0$	$2^{\sqrt{x^2-4}}\geq 0$
$\dfrac{e^x-e}{e^x+e}<0$	$2^{x+1}+\dfrac{8}{2^x}\geq 17$	$\dfrac{2^x-1}{8-2^x}\leq 0$
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^x<\dfrac{1}{9}$	$5^{2x}-6\cdot 5^x+5>0$	$(x-2)\cdot 3^{x^2-4x}\leq 0$
$\dfrac{1}{2^{x^2}}<\dfrac{1}{4}$	$2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-2^x\leq 1$	$4^{\frac{2}{x}}-4^{\frac{1}{x}}+1>0$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

$\log_{\sqrt[3]{5}} x<6$	$\log_2(x+6)-2\log_2 x\geq 3\log_8 2$	$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-8)<0$
$\log(x^2-x-1)>0$	$(\log_2 x)^2+3\log_2 x\geq \dfrac{5}{2}\log_{4\sqrt{2}} 19$	$20\ln^2 x+31\ln x-9>0$
$\log\dfrac{x^2+10x+16}{x-1}>1$	$3\log_2 x-\dfrac{12}{\log_2 x}<5$	$\log_2{}^2 x-7\log_2 x+12<0$
$\log\log(x+2)>0$	$\log_{\frac{1}{2}}(4x+x^2)\leq 1$	$\log x+\log(x+1)>\log(x-2)$