

CORSO ZERO DI MATEMATICA

“DISEQUAZIONI E SISTEMI”

Dr. Erasmo Modica

[erasmo@galois.it](mailto:erasmo@galois.it)

[www.galois.it](http://www.galois.it)

SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

**Definizione:** Si definisce *equazione di primo grado in due incognite* un'equazione del tipo:

$$ax + by + c = 0$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Si nota facilmente che una tale equazione ammette come *soluzioni* infinite coppie ordinate di numeri reali.

**Esempio:**

L'equazione  $3x - y = 0$  ammette come soluzioni le coppie  $(0,0)$ ,  $(1,3)$ ,  $(2,6)$ , ...

**Definizione:** Si definisce *sistema di equazioni* l'insieme di due o più equazioni che devono essere soddisfatte *contemporaneamente*. L'insieme delle *soluzioni* del sistema è dato dall'*intersezione* delle soluzioni delle singole equazioni componenti.

**Definizione:** Un sistema di equazioni si dice *lineare* se le equazioni che lo compongono sono tutte di primo grado.

SISTEMI LINEARI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

**Definizione:** Un *sistema lineare di due equazioni in due incognite* è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

con  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ .

Un sistema di tale tipo può ammettere:

- un'unica soluzione, cioè una sola coppia  $(x, y)$  soddisfa il sistema, che in tale caso si dice *determinato*;
- infinite soluzioni, cioè tutte le coppie  $(x, y)$  soddisfano il sistema, che in tale caso si dice *indeterminato*;
- nessuna soluzione, cioè non esistono coppie di numeri reali che soddisfano il sistema, che in tale caso si dice *impossibile*.

**METODO DEL CONFRONTO**

Questo metodo consiste nel ricavarsi la medesima incognita dalle due equazioni e uguagliare le espressioni ottenute, cioè:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{-ax-c}{b} \\ y=\frac{-a'x-c'}{b'} \end{cases} \rightarrow \frac{-ax-c}{b}=\frac{-a'x-c'}{b}$$

*Esempio:* Risolvere il sistema  $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ x+4y+3=0 \end{cases}$

Ricaviamo la variabile  $x$  da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} x=\frac{3y-5}{2} \\ x=-4y-3 \end{cases}$$

e sostituiamola al posto della  $x$  nella prima equazione del sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{3y-5}{2} \\ x=-4y-3 \end{cases} \rightarrow \frac{3y-5}{2}=-4y-3 \rightarrow 3y-5=-8y-6 \rightarrow 11y=-1 \rightarrow y=-\frac{1}{11}$$

Sostituendo il valore ottenuto in una delle due equazioni si ottiene il valore di  $x$ :

$$x=-\frac{29}{11}$$

**METODO DI SOSTITUZIONE**

Questo metodo consiste nel ricavarsi una delle due incognite da una delle due equazioni e sostituirla nell'altra, cioè:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{-ax-c}{b} \\ a'x+b'\left(\frac{-ax-c}{b}\right)+c'=0 \end{cases} \rightarrow a'x-\frac{ab'}{b}x=-c'+\frac{cb'}{b} \rightarrow \left(\frac{a'b-ab'}{b}\right)x=\frac{cb'-bc'}{b} \rightarrow x=\frac{cb'-bc'}{a'b-ab'}$$

*Osservazione:* Appare evidente che un tale sistema per ammettere soluzione deve essere tale che  $a'b-ab' \neq 0$ .



**Esempio:** Risolvere il sistema 
$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo la variabile  $x$  dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ x = -4y - 3 \end{cases}$$

e sostituiamola al posto della  $x$  nella prima equazione del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(-4y - 3) - 3y + 5 = 0 \\ x = -4y - 3 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} -8y - 6 - 3y + 5 = 0 \\ x = -4y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -11y = 1 \\ x = -4y - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{11} \\ x = -4\left(-\frac{1}{11}\right) - 3 \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{11} \\ x = \frac{4}{11} - 3 = \frac{4 - 33}{11} = -\frac{29}{11} \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = -\frac{29}{11} \\ y = -\frac{1}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

### METODO DI RIDUZIONE

Per risolvere i sistemi con questo metodo si fa uso del principio di equivalenza delle equazioni. A partire dalle uguaglianze:

$$\begin{cases} A(x) = B(x) \\ C(x) = D(x) \end{cases}$$

si ottengono le equazioni equivalenti:

$$\begin{aligned} A(x) + C(x) &= B(x) + D(x) \\ A(x) - C(x) &= B(x) - D(x) \end{aligned}$$

da associare ad una delle equazioni di partenza.

**Esempio:** Risolvere il sistema 
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 4y = 9 \end{cases} \\ \hline 0 - 6y = 12 \end{array}$$

da cui segue che:

$$y = -2$$

che, sostituita in una delle due equazioni ci dà come risultato:

$$x = -1$$

*Osservazione:* Se i coefficienti delle incognite sono tutti differenti, è possibile fissarsi su una di esse e moltiplicare le due equazioni per il m.c.m. dei due coefficienti. In questo modo si ottiene un sistema in cui una delle due incognite ha i coefficienti uguali e si può quindi utilizzare il metodo di riduzione.

### METODO DI CRAMER

Quello di Cramer è uno dei metodi di risoluzione dei sistemi di equazioni che, in generale, conviene utilizzare quando i coefficienti delle incognite sono tutti diversi da 1.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ad esso si associa il numero reale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

che prende il nome di **determinante del sistema**.

Si considerano successivamente i **determinanti relativi** alle due incognite:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - ca'$$

Le soluzioni del sistema sono date dai rapporti tra i determinanti relativi alle incognite e il determinante del sistema :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Osserviamo che, affinché il sistema ammetta soluzioni, è necessario che si abbia  $ab' - ba' \neq 0$ .

In generale si ha che:

- se  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ , allora il sistema ammette infinite soluzioni;
- se  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ , allora il sistema è impossibile;
- se  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ , allora il sistema è determinato e ammette un'unica soluzione.

**Esempio:** Risolvere, utilizzando il metodo di Cramer, il sistema  $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ .

Consideriamo il determinante del sistema e i determinanti delle incognite:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 = 19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 35 = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 2 = 19$$

Le soluzioni del sistema sono quindi date da:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1$$

## SISTEMI DI SECONDO GRADO

**Definizione:** Si dice *grado* di un sistema di equazioni il prodotto dei gradi dei polinomi che lo compongono.

**Definizione:** Un *sistema di secondo grado* è un sistema costituito da un'equazione di secondo grado nelle variabili  $x$  e  $y$  e da un'equazione di primo grado, cioè:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Un tale sistema si può risolvere con il metodo di sostituzione, infatti si ha:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} mx + q = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - q) = 0$$

Il discriminante dell'equazione ci metterà in condizioni di stabilire se il sistema ammette o meno soluzioni.

**Esempio:** Risolvere il sistema  $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$

Utilizzando il metodo di sostituzione si ottiene l'equazione:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = 1 \wedge x_2 = 5$$

Le soluzioni del sistema sono quindi date dalle coppie:

$$(1, 0), (5, 4)$$

### SISTEMI SIMMETRICI

**Definizione:** Si definisce *sistema simmetrico* un sistema di cui, scambiando tra di loro le incognite, non si modifica la forma, cioè un sistema di uno dei seguenti tipi:

$$\begin{aligned} & - \begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \quad \text{con } s, p \in \mathbb{R} \\ & - \begin{cases} x + y = s \\ x^2 + y^2 = r \end{cases} \quad \text{con } s, r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Per risolvere il primo tipo di sistema è necessario ricordare le relazioni che intercorrono tra le soluzioni di un'equazione di secondo grado e i suoi coefficienti, cioè:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Infatti al sistema simmetrico considerato si associa l'equazione di secondo grado:

$$t^2 - st + p = 0$$

e le soluzioni di tale equazioni ci danno le soluzioni del sistema simmetrico.

**Esempio:** Risolvere il sistema  $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

Consideriamo l'equazione associata:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$t_1 = 2 \wedge t_2 = 3$$

Di conseguenza il sistema ammette come soluzioni le due coppie:

$$(2,3), (3,2)$$

Per risolvere il secondo tipo di sistema si utilizza il seguente accorgimento:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \quad (\text{formula di Waring})$$

e quindi la seconda equazione del sistema va riscritta come:

$$(x + y)^2 - 2xy = r \rightarrow s^2 - 2xy = r \rightarrow xy = \frac{s^2 - r}{2}$$

Ci si riconduce così a un sistema simmetrico del primo tipo:

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = \frac{s^2 - r}{2} \end{cases}$$

**Esempio:** Risolvere il sistema  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Il sistema si trasforma in quello equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 0 \end{cases}$$

ed è semplice pervenire alle soluzioni:

$$(0,5); (5,0)$$

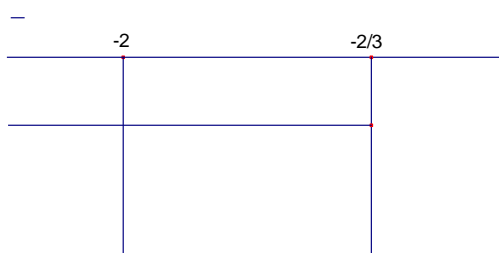
## SISTEMI DI DISEQUAZIONI RAZIONALI INTERE

**Definizione:** Una *sistema di disequazioni razionali intere* è costituito da più disequazioni razionali intere che devono essere soddisfatte contemporaneamente.

Per risolvere un sistema, quindi, bisogna risolvere singolarmente le disequazioni date e si prendono in considerazione le soluzioni comuni ad esse, cioè si considera l'intersezione delle soluzioni. Se non esistono soluzioni comuni il sistema si dice *incompatibile*.

**Esempio:** Risolvere il sistema di disequazioni  $\begin{cases} 3x + 4 \leq 2 \\ x + 5 > 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2 \\ x + 5 > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \leq -2 \\ x > -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x > -2 \end{cases}$$



Le soluzioni sono quindi tutte le  $x \in \mathbb{R}$  tali che  $-2 < x \leq -\frac{2}{3}$ .

**ESERCIZI SUI SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO**

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni di primo grado.

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} (x-1)^2 - (y-1)^2 = (x-y)(x+y) \\ x(x-2y) + y(2x-1) = x^2 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{4} = \frac{x+y-3}{3} \\ \frac{2}{3}(x-y) + x = 2 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{4} = \frac{x+y-3}{3} \\ \frac{2}{3}(x-y) + x = 2 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6} \\ 2x - \frac{1}{4} = y \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 3(x-2y) - 2(y-x) = 1 \\ 5x - 2(3x-y) = 3+x \end{cases} \\
 6) \begin{cases} (x+y)\left(\frac{1}{15} + y\right) - xy + \frac{y}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{15}y + y^2 \\ 1 - \frac{2y}{15} = -\frac{x}{5} \end{cases} \\
 7) \begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{5-x}{xy^2-x} = -\frac{xy+y}{x-xy^2} \\ \frac{2x-5}{5} - y = 0 \end{cases} \\
 8) \begin{cases} x+y+z - \frac{11}{6} = 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{4x+3y}{5} = \frac{z-2y}{5} \\ \frac{2x-3}{2} + \frac{y+2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}y \end{cases} \\
 9) \begin{cases} z - 4\left(x - \frac{y}{2} + 1\right) = -3x \\ -\frac{x}{3} = 1 \\ (y-1)^2 + 3x - 2(z-1) = (y+2)(y-3) \end{cases} \quad \left(-3; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)
 \end{array}$$

**ESERCIZI SUI SISTEMI DI EQUAZIONI DI SECONDO GRADO**

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni di secondo grado.

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} y = x^2 + 3x + 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x^2 + 3xy = 28 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 2x - y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} x^2 - xy = y^2 + 11 \\ 2x + 4 + y = 0 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} 3x = y + 2 \\ x^2 - xy + y^2 = 36 + xy \end{cases} \\
 6) \begin{cases} (x-3)^2 = 3x(y-2) \\ x(2y-3) = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

**SISTEMI DI DISEQUAZIONI**

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} -x + 4(5+2x) > 3(1-x) \\ 2(3x+1) \leq 0 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} (x-2)^2 - (x+5)^2 - 11 \leq 0 \\ \frac{3x-13}{2} - (2x+4) \geq -3 \end{cases} \\
 3) \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} < 6\left(3 + \frac{x}{3}\right) - 1 \\ 4x - 2 > x + 3(x-4) \end{cases}
 \end{array}$$

$$5) \begin{cases} 2 + \frac{x}{3} \geq 0 \\ -2 - \frac{x}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x^2 - 10x > 10x - 25 \\ 3x > 2x \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 8x^2 + 9x + 13 > 0 \\ -2x^2 - 8x - 27 < 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x^2 + 7x + 10 > 0 \\ 3x^2 + 8x + 11 < 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ x(x+2) < 2x+4 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x(x+2) < 0 \\ (x-2)x > 0 \\ (x+2)(x-2) < 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} -x^2 + 4x - 4 \leq 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 9x^2 + 24x + 16 > 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^2 + 6x + 25 > 0 \\ -x^2 + 8x - 19 < 0 \\ x^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$$

## DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL II

Risolvere le seguenti disequazioni.

$$1) (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) < 0$$

$$2) (x^2 - 4)(x - 2) \geq 0$$

$$3) (x-7)(x^2 - 7x + 10) < 0$$

$$4) (x^2 - 4)(x^2 - 9) \geq 0$$

$$5) (x^4 + 4x^3 - 12x^2)(x+3) \geq 0$$

$$6) (x-4)^3 - (x-4)^2 - 2x + 10 > 2$$

$$7) x^3 - 1 \geq 0$$

$$8) (x^2 + 6x - 27)(2x^2 + 13x + 6) < 0$$

$$9) (x+3)(x+4)(x+5)(5-x)(4-x)(3-x) > 0$$