UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

CORSO ZERO DI MATEMATICA

"*EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO*"

Dr. Erasmo Modica
erasmo@galois.it
www.galois.it

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione: Dicesi ***equazione di secondo grado***, un'espressione del tipo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
I valori a, b, c prendono il nome di ***coefficienti*** e, in particolare, c viene detto ***termine noto***.

Un'equazione di secondo grado si definisce:

- ***incompleta pura*** quando il secondo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + c = 0$;
- ***incompleta spuria*** quando il terzo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + bx = 0$;
- ***completa*** quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero e quindi si ha $ax^2 + bx + c = 0$.

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

1 – EQUAZIONE INCOMPLETA PURA $(\boldsymbol{b = 0})$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + c = 0$$

e si risolve portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente del termine di grado massimo:

$$ax^2 = -c \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 - 9 = 0$.

Le soluzioni si ottengono come segue:

$$x^2 = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 + 9 = 0$.

L'equazione non ammette soluzioni in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo e, di conseguenza, la scrittura $x^2 = -\frac{9}{4}$ non è verificata per nessun valore dell'incognita.

<u>*Osservazione*</u>: Un'equazione incompleta pura ammette soluzioni se, e solo se, i coefficienti a e c sono discordi.

2 – EQUAZIONE INCOMPLETA SPURIA $(\boldsymbol{c = 0})$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

e si risolve mettendo in evidenza la x e procedendo secondo la legge di annullamento del prodotto[1]. Di conseguenza una soluzione sarà sempre quella nulla.

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(ax+b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $2x^2 - 4x = 0$.

Si ha:

$$2x(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad x = 2$$

3 – EQUAZIONE COMPLETA

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolverla si procede come segue:

$$\begin{array}{cc}
ax^2 + bx + c = 0 & (moltiplichiamo\ ambo\ i\ membri\ per\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 & (aggiungiamo\ ad\ ambo\ i\ membri\ b^2) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 & (portiamo\ 4ac\ a\ secondo\ membro) \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac & \\
(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac & \\
2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} & \\
2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} & \\
x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}$$

e si è soliti porre $\Delta = b^2 - 4ac$, che prende il nome di ***discriminante*** dell'equazione.

[1] Un prodotto si annulla se, e solo se, almeno uno dei suoi fattori è nullo.

Le soluzioni sono quindi date dalla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si possono quindi presentare tre casi:

1° caso: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le ***due soluzioni reali e distinte***:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2° caso: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso l'equazione ammette ***due radici reali e coincidenti*** date dall'espressione:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3° caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso l'equazione ***non ammette soluzioni reali***, ma soluzioni complesse coniugate.

Esempi:

1. Risolvere l'equazione $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

2. Risolvere l'equazione $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

3. Risolvere l'equazione $x^2 - x + 3 = 0$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

L'equazione non ammette soluzioni reali.

RELAZIONI TRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI

Consideriamo una generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nell'ipotesi in cui ammette soluzioni reali distinte (cioè $\Delta > 0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Quindi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \textbf{Somma delle radici}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \qquad \textbf{Prodotto delle radici}$$

Esempio: *Data l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$, determinare, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Applicando le precedenti formule si ha:

- $x_1 + x_2 = \frac{5}{1} = 5;$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6.$

SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI II GRADO IN FATTORI

Consideriamo il trinomio $ax^2 + bx + c$ ed effettuiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = && (sostituendo\ le\ relazioni\ precedenti) \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = \\ &= a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 \cdot x_2] = && (raccogliendo\ parzialmente) \\ &= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Esempio: *Dato il trinomio $x^2 - 5x + 6$, scomporlo in fattori.*

Applicando la precedente formula si ha: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione: Una ***disequazione di secondo grado*** è una disuguaglianza del tipo:

$$ax^2+bx+c>0 \qquad \text{oppure} \qquad ax^2+bx+c<0$$

Supponendo $a>0$[2] le soluzioni sono riassunte nella seguente tabella:

$\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$	$\mathbf{ax^2+bx+c>0}$	$\mathbf{ax^2+bx+c<0}$
$\mathbf{\Delta>0}$	La disequazione è soddisfatta da tutti i valori dell'incognita che sono esterni all'intervallo avente per estremi le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$	La disequazione è soddisfatta da tutti i valori dell'incognita che sono interni all'intervallo avente per estremi le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$
$\mathbf{\Delta=0}$	La disequazione è soddisfatta da tutti i valori dell'incognita, eccetto il valore $-\frac{b}{2a}$ per il quale il trinomio si annulla.	La disequazione non ammette soluzioni reali. $S=\varnothing$
$\mathbf{\Delta<0}$	La disequazione è soddisfatta da tutti i valori reali. $S=\mathbb{R}$	La disequazione non ammette soluzioni reali. $S=\varnothing$

Esempi:

1. Risolvere la disequazione $3x^2-5x+2>0$

   Le soluzioni di tale disequazione sono date dagli intervalli $x<\frac{2}{3}$ e $x>1$.

2. Risolvere la disequazione $x^2-4x+4>0$

   Le soluzioni della disequazione $(x-2)^2>0$ sono tutti i valori reali escluso $x=2$, cioè $\mathbb{R}-\{2\}$.

3. Risolvere la disequazione $x^2+x+1>0$

   Essendo il $\Delta<0$ la disequazione ammette come insieme di soluzioni tutti i numeri reali.

DISEQUAZIONI FRATTE

Definizione: Dicesi ***disequazione razionale fratta*** una disequazione nella quale compaiono denominatori contenenti l'incognita.

[2] Se $a<0$ si moltiplicano ambo i membri della disequazione per -1 e si inverte il verso della disequazione.

Ogni disequazione fratta può essere ricondotta alla forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

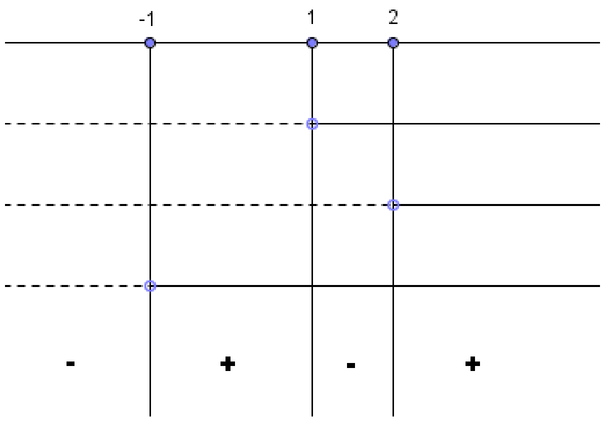
in cui $A(x)$ e $B(x)$ sono due polinomi nell'indeterminata x.
Questo tipo di disequazione è soddisfatta da tutti i valori dell'incognita che rendono concordi i segni del numeratore e del denominatore.

Esempio: Risolvere la disequazione $\frac{(x-1)(x-2)}{x+1} < 0$

Studiamo i segni del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 \qquad x-1>0 \rightarrow x>1$$
$$x-2>0 \rightarrow x>2$$

$$D > 0 \qquad x+1>0 \rightarrow x>-1$$



Essendo il verso della disequazione <, si considerano gli intervalli negativi, cioè:

$$x < -1 \vee 1 < x < 2$$

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Per risolvere questo tipo di disequazioni è necessario portarle alla forma normale

$$P(x) \leq 0 \;\; o \;\; P(x) \geq 0$$

e scomporre in fattori il polinomio $P(x)$. Successivamente si studiano i segni dei singoli fattori e si riportano i risultati sulla retta reale. Applicando la regola dei segni, si stabilisce qual è l'insieme delle soluzioni.

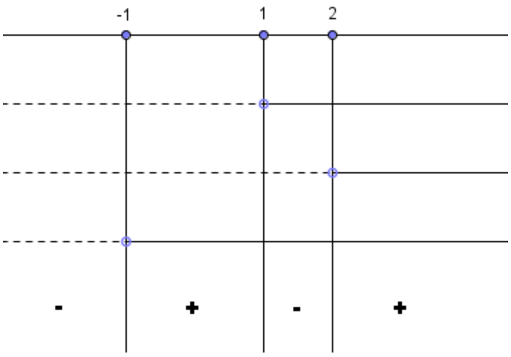
Esempio: Risolvere la disequazione $(x-1)(x-2)(x+1)<0$

Studiamo i segni dei singoli fattori:

$$x-1>0 \rightarrow x>1$$

$$x-2>0 \rightarrow x>2$$

$$x+1>0 \rightarrow x>-1$$



Essendo il verso della disequazione <, si considerano gli intervalli negativi, cioè:

$$x<-1 \vee 1<x<2$$

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1. Risolvere le seguenti equazioni di II grado ed equazioni ad esse riconducibili.

1) $x^2 = 4$
2) $x^2 = 16$
3) $x^2 = 49$
4) $x^2 - 25 = 0$
5) $4x^2 - 1 = 0$
6) $25x^2 - 36 = 0$
7) $2x^2 - 1 = 0$
8) $6x^2 + 4 = 0$
9) $-16x^2 - 144 = 0$
10) $3x^2 - 1 = 0$
11) $10x^2 - 1000 = 0$
12) $7x^2 + 3 = 0$
13) $9x^2 - 4 = 0$
14) $12x^2 = -5$
15) $49 = 4x^2$
16) $5x^2 = -1$
17) $625 = x^2$
18) $7x^2 - 3 = 0$
19) $-1 + \sqrt{5}x^2 = 0$
20) $-9x^2 - 2 = 0$
21) $-75 = 3x^2$
22) $2 = \sqrt{2}x^2$
23) $\sqrt{3}x^2 - 3 = 0$
24) $4x^2 - 9 = 0$
25) $4 = 121x^2$
26) $-27 = 3x^2$
27) $25x^2 = 81$
28) $64x^2 - 16 = 0$
29) $-2 = 81x^2$
30) $625x^2 - 121 = 0$
31) $2\sqrt{2}x^2 = \sqrt{3}$
32) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4} = 0$
33) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2} = 0$
34) $\frac{4}{5}x^2 = \frac{5}{4}$
35) $-\frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{16} = 0$
36) $-4 + \frac{1}{5}x^2 = 0$
37) $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 2\sqrt{2} = 0$
38) $(x-1)^2 = 16$
39) $(4x+3)^2 = 25$
40) $(x-5)^2 + 9 = 0$
41) $(3x-1)^2 - 36 = 0$
42) $(x-1)^2 = 16$
43) $4(2x+1)^2 = 36$
44) $(3x-5)^2 - 49 = 0$
45) $(2x+8)^2 + 12 = 0$
46) $x^2 - x = 0$
47) $2x^2 + 6x = 0$
48) $5x^2 + 3x = 0$
49) $9x^2 + 16x = 0$
50) $3x^2 - 2x = 0$
51) $-2x^2 + 4x = 0$
52) $7x^2 - 2x = 0$
53) $5x = 25x^2$
54) $-2x^2 - 16x = 0$
55) $3x^2 - 4x = 0$
56) $9x^2 - 36x = 0$
57) $16x^2 - 5x = 0$
58) $4x^2 - 3x = 0$
59) $5x^2 + 4x = 0$
60) $81x^2 = 9x$
61) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x = 0$
62) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$
63) $2\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x = 0$
64) $8x^2 - 32x = 0$
65) $-2x = 7x^2$
66) $5\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$
67) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = 0$
68) $-\frac{2}{3}x + x^2 = 0$
69) $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x^2 = 0$
70) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$
71) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$
72) $\frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{5}x = 0$
73) $3x^2 - \frac{4}{3}x = 0$
74) $(x-1)^2 + 2(x-1) = 0$

75) $3(2x+5)^2-4(2x+5)=0$
76) $121x^2-1=0$
77) $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$
78) $10x^2-5x=9x^2+5x$
79) $\sqrt{7}x^2-8x+\sqrt{7}=0$
80) $3x^2-10x=9\sqrt{3}x-\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}$
81) $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$
82) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{9}{3x-1}=10$
83) $x^4-10x^2+9=0$
84) $2x^4-11x^2+9=0$

2. Date le seguenti equazioni, calcolare la somma e il prodotto delle loro radici.
   a) $x^2+4ax+a=0$
   b) $6x^2+5x-1=0$
   c) $2x^2-\sqrt{2}x+1=0$
   d) $3x^2+ax+12=0$
   e) $5x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=0$
   f) $2x^2+6kx+3k^2=0$
   g) $3\sqrt{3}x^2-6\sqrt{3}x+2=0$
   h) $a\sqrt{2}x^2+a^2x-\sqrt{2}=0$
   i) $\sqrt{2}x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+4=0$
   j) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})x^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})x+1=0$

3. Scrivere un'equazione di secondo grado che ammette come radici le coppie di soluzioni indicate.
   a) $x_1=-2 \quad x_2=5$
   b) $x_1=7 \quad x_2=2$
   c) $x_1=9 \quad x_2=-3$
   d) $x_1=\sqrt{2} \quad x_2=\sqrt{5}$
   e) $x_1=-\sqrt{2} \quad x_2=\sqrt{3}$
   f) $x_1=\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{6}$
   g) $x_1=2\sqrt{2} \quad x_2=\sqrt{5}$
   h) $x_1=-2\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{7}$
   i) $x_1=a \quad x_2=b$
   j) $x_1=ab \quad x_2=b^2$
   k) $x_1=2a \quad x_2=a^2$
   l) $x_1=a+b \quad x_2=a-b$
   m) $x_1=a\sqrt{2} \quad x_2=-a$
   n) $x_1=2a\sqrt{2} \quad x_2=a\sqrt{3}$
   o) $x_1=-\frac{1}{2} \quad x_2=\frac{3}{4}$
   p) $x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$
   q) $x_1=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
   r) $x_1=-6 \quad x_2=-\frac{1}{4}$
   s) $x_1=\frac{2}{5} \quad x_2=\sqrt{2}$
   t) $x_1=3a+b \quad x_2=3a-b$
   u) $x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=\frac{2}{3}a$
   v) $x_1=-2m \quad x_2=\frac{m}{3}$

4. Determinare, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati.
   a) $s=3 \quad p=5$
   b) $s=7 \quad p=2$
   c) $s=-3 \quad p=-8$
   d) $s=-5 \quad p=4$
   e) $s=\frac{1}{2} \quad p=\frac{2}{3}$
   f) $s=6 \quad p=13$
   m) $s=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad p=\frac{1}{4}$
   g) $s=a+1 \quad p=a^2$
   h) $s=2b \quad p=b^2$
   i) $s=k+1 \quad p=k^2+2k+1$
   j) $s=\sqrt{2} \quad p=2$
   k) $s=2\sqrt{2}+1 \quad p=1$
   l) $s=\sqrt{7}-1 \quad p=6$
   n) $s=\frac{a\sqrt{2}}{4} \quad p=\frac{a^2}{2}$

5. Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.
6. Un numero, addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trovare il numero.

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1. Risolvere nell'insieme $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni.
   a) $-x^2 - x < 0$
   b) $(x+3)(x+2) < -(x+2)^2$
   c) $\dfrac{(3-x)^2}{2} - 1 \geq -\dfrac{x^2-4}{4}$
   d) $-2x^2 + 11x + 6 \geq 0$
   e) $(x+1)^2 > (x-1)^2 + (x+2)^2 + 4x$
   f) $\dfrac{x^2}{4} + x < \dfrac{x+3}{4} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1-\dfrac{x}{2}}{2}$

2. Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione:
   $$kx^2 - x + k = 0$$
   non ammette soluzioni reali.
3. Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione:
   $$x^2 + (k-2)x + 1 = 0$$
   ammette due soluzioni reali e distinte.