

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO  
FACOLTÀ DI ARCHITETTURA

**CORSO ZERO DI MATEMATICA**

**“EQUAZIONI E DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO”**

*Dr. Erasmo Modica*  
[erasmo@galois.it](mailto:erasmo@galois.it)  
[www.galois.it](http://www.galois.it)

## IDENTITÀ ED EQUAZIONI

Si consideri un'uguaglianza tra due espressioni algebriche

$$A = B$$

se si sostituiscono al posto della  $A$  e della  $B$  dei numeri, si può verificare uno dei tre casi seguenti:

- l'uguaglianza  $A = B$  è sempre vera;
- l'uguaglianza  $A = B$  è sempre falsa;
- l'uguaglianza  $A = B$  risulta vera solo per alcuni numeri e falsa per altri.

Se lo scopo è quello di determinare quali valori numerici si devono attribuire ad  $A$  e  $B$  affinché l'uguaglianza  $A = B$  risulti vera, si dice che quest'ultima uguaglianza è un'equazione.

**Definizione:** Si dice *equazione* un'uguaglianza tra due espressioni algebriche per la quale si vogliono determinare i valori delle variabili che la rendono vera.

Le variabili che compaiono in un'equazione prendono il nome di *incognite* e si indicano con le lettere finali dell'alfabeto  $x, y, z, \dots$

La forma generale di un'equazione è:

$$A(x) = B(x)$$

l'espressione  $A(x)$  si dice *primo membro* dell'equazione, mentre l'espressione  $B(x)$  si dice *secondo membro*.

**Definizione:** Si dice *soluzione* o *radice* di un'equazione quel numero che, sostituito al posto della variabile, realizza l'uguaglianza.

In base al tipo di soluzione trovata, le equazioni vengono classificate come indicato nella seguente tabella.

| <i>Classificazione</i>                   | <i>Insieme delle soluzioni</i> | <i>Esempio</i>                |
|--|--------------------------------|-------------------------------|
| <i>Possibile</i> (nell'insieme $A$ )     | $S \neq \emptyset$             | $2x = 4$ in $\mathbb{N}$      |
| <i>Impossibile</i> (nell'insieme $A$ )   | $S = \emptyset$                | $x + 2 = 1$ in $\mathbb{N}$   |
| <i>Determinata</i> (nell'insieme $A$ )   | $S \subset A, S$ finito        | $x + 3x = 24$ in $\mathbb{Q}$ |
| <i>Indeterminata</i> (nell'insieme $A$ ) | $S \subseteq A, S$ infinito    | $x + 3x = 4x$ in $\mathbb{R}$ |



**Definizione:** Due equazioni si dicono *equivalenti* se ammettono le stesse soluzioni.

**Esempio:** Le equazioni  $2x = 1$  e  $6x = 3$  sono equivalenti in  $\mathbb{Q}$ .

**I Principio di Equivalenza:** *Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita (che sia definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

**Regola 1:** In ogni equazione un termine si può spostare da un membro all'altro, purché venga cambiato il segno.

**Esempio:** L'equazione  $3x + 5 = x - 1$  è equivalente all'equazione  $3x - x = -5 - 1$ .

**Regola 2:** Se in ciascun membro di un'equazione compaiono le stesse quantità, queste si possono eliminare.

**Esempio:** L'equazione  $3x + 5 + x = x - 1 + 3x - 7$  è equivalente all'equazione  $3x - 5 + x = x - 1 + 3x - 5$ .

**II Principio di Equivalenza:** *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, che sia definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

**Regola 1:** Se si cambiano i segni di tutti i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

**Esempio:** L'equazione  $3x + 5 = x - 1$  è equivalente all'equazione  $-3x - 5 = -x + 1$ .

**Regola 2:** Un'equazione con coefficienti frazionari si può trasformare in un'equazione equivalente con i coefficienti interi moltiplicando ciascun membro per il m.c.m. dei denominatori.

**Esempio:**

L'equazione  $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+1}{6}$  è equivalente all'equazione  $2(x - 1) - 3x = x + 1$ .

#### FORMA NORMALE E GRADO DI UN'EQUAZIONE

**Definizione:** Si definisce *forma normale* di un'equazione la scrittura:

$$P(x) = 0$$

**Definizione:** Si definisce *grado* di un'equazione, scritta in forma normale, il grado del polinomio  $P(x)$ .

## RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO NUMERICA

Risolviamo adesso un'equazione di primo grado ad un'incognita, scritta in forma normale, nella sua espressione più generale:

$$ax + b = 0$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Applicando i principi d'equivalenza, si ottiene l'espressione

$$ax = -b$$

e quindi si possono presentare i tre casi:

I Caso:  $a \neq 0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \left\{-\frac{b}{a}\right\} \Rightarrow$  *equazione determinata*;

II Caso:  $a = 0$  e  $b \neq 0 \Rightarrow 0x = -b \Rightarrow S = \emptyset \Rightarrow$  *equazione impossibile*;

III Caso:  $a = 0$  e  $b = 0 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R} \Rightarrow$  *equazione indeterminata*.

**Esempi:**

1.  $x + 3x = 24 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$ ;
2.  $3x + 1 = 3x \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$  equazione impossibile;
3.  $4x = 3x + x \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$  equazione indeterminata.

## EQUAZIONI FRATTE

**Definizione:** Un'equazione si dice *fratta* quando l'incognita compare a denominatore di una frazione, ovvero:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

I valori che annullano il denominatore dell'equazione indicano quali valori le soluzioni non possono assumere e quindi consentono di stabilire quali sono le **condizioni di accettabilità delle soluzioni**.

**Esempio:** Risolvere l'equazione  $\frac{5-x}{x+2} = 3$ .

Le condizioni di accettabilità si stabiliscono imponendo  $x + 2 \neq 0$  e si ottiene  $x \neq -2$ . Risolviamo adesso l'equazione:

$$\frac{5-x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} \Rightarrow 5-x = 3x+6 \Rightarrow -x-3x = 6-5 \Rightarrow -4x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

La soluzione è accettabile in quanto è diversa da -2.



## DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

**Definizione:** Una *disequazione razionale intera di primo grado* è una disuguaglianza del tipo:

$$ax + b > 0 \quad \text{oppure} \quad ax + b < 0$$

Per risolvere le disequazioni ci si avvale dei seguenti principi d'equivalenza:

**I Principio:** Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di una disequazione una stessa quantità, si ottiene una disequazione equivalente.

**II Principio:** Moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità, purché diversa da zero, si ottiene una disequazione equiversa se la quantità è positiva, di verso opposto se la quantità è negativa.

Se si suppone  $a > 0$ , si ottiene:

$$\begin{array}{lcl} ax > -b & \xrightarrow[\text{dividendo per } a]{} & x > -\frac{b}{a} \\ ax < -b & \xrightarrow[\text{dividendo per } a]{} & x < -\frac{b}{a} \end{array}$$

**Esempi:**

1. Risolvere la disequazione  $7x - 14 > 0$

Si ha:

$$7x > 14 \quad \xRightarrow[\text{dividendo ambo i membri per } -7]{} \quad x > \frac{14}{7} = 2$$

2. Risolvere la disequazione  $-7x + 14 > 0$

Si ha:

$$-7x > -14 \quad \xRightarrow[\text{dividendo ambo i membri per } -7]{} \quad x < \frac{-14}{-7} = 2$$

**ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO**

1. Risolvere le seguenti equazioni di I grado.

|  |   |
|--|---|
| $6 - [-2x + 4(x-1) + 2(3-x)] = 0$                                | $5 + (x+1)(x-1) = (x+2)^2 - 4x$   |
| $-\left(\frac{2}{3} - x\right) + 4(x+2) - \frac{1}{3}(5x-3) = 0$ | $3\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(2x + \frac{1}{2}\right) - 2(2x-1)^2 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ |
| $\frac{-3x-7}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2} + 3$                       | $\frac{9x+4}{3x-3} + 1 = \frac{6x-1}{3-3x} + \frac{2}{3x-3}$  |

- Determinare l'equazione risolvente il problema: "Trovare due numeri naturali, l'uno triplo dell'altro, la cui somma sia 224".
- Determinare l'equazione risolvente il problema: "Trova il numero che addizionato alla metà del suo quintuplo dia come risultato 77".

**ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO**

- $2(2x + 5) - 6 > 2 - 4(1 - x)$
- $(x + 2)(x - 4) < (x - 1)(x + 6)$
- $-2 + 3(2x + 8) - 6(x - 1) < 0$
- $(x + 3)^2 - 2x + 1 \geq (x - 2)(x + 4) - 3$
- $\frac{x+4}{4} + \frac{x+2}{3} < \frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6}$
- $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{16} < \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$
- $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 < 0$
- $3 - (x - 1)(2x - 4) + 5(x - 3) > -2(x - 2)^2$
- $\frac{3(x-2)}{2} - \frac{4}{3}(x + 1) > 4x - \frac{x+3}{4} - \frac{5}{3}(x + 1)$
- $\frac{3x+1}{4} - \frac{x+5}{3} \leq -1 - \frac{x+2}{6}$
- $(2x + 1)^2 < 6 + (2x - 1)^2 - 3(1 - 2x)$
- $\frac{1-2x}{2} + \frac{4-4x}{10} < \frac{2x-13}{10} - \frac{4x-3}{5}$
- $\frac{3(2x-1)}{2} - \frac{4(2-3x)}{3} > 4 - \frac{-x+3}{4} - \frac{5(3-x)}{3}$
- $2x^2 - 5 \geq 7x - 9 + 2x^2$
- $\frac{x-2}{2} + \frac{2(2x-1)-1}{8} \leq \frac{2x+1}{2} - \frac{2x-1}{8}$
- $x + \frac{2x-1}{4} - 3 + \frac{4x-1}{4} < \frac{x-2}{2} + \frac{1}{4}$
- $(10x - 1)^2 > 2 + 4(4x + 1)^2 + (6x - 1)^2$
- $(2x - 1)^2 + 3(1 - 2x) < 4x(x - 1) + 2$