



# Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

## Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.*

### PROBLEMA 1

Sia  $f$  la funzione definita sull'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali da  $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$  e sia  $\Gamma$  la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento  $Oxy$ .

1. Si determini il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  e a  $-\infty$ . Si calcoli  $f(x) + f(-x)$  e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto  $A(0; 1 + \ln 4)$  è centro di simmetria di  $\Gamma$ .
2. Si provi che, per tutti i reali  $m$ , l'equazione  $f(x) = m$  ammette una e una sola soluzione in  $\mathbf{R}$ . Sia  $\alpha$  la soluzione dell'equazione  $f(x) = 3$ ; per quale valore di  $m$  il numero  $-\alpha$  è soluzione dell'equazione  $f(x) = m$ ?
3. Si provi che, per tutti gli  $x$  reali, è:  $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ . Si provi altresì che la retta  $r$  di equazione  $y = x + \ln 4$  e la retta  $s$  di equazione  $y = x + 2 + \ln 4$  sono asintoti di  $\Gamma$  e che  $\Gamma$  è interamente compresa nella striscia piana delimitata da  $r$  e da  $s$ .
4. Posto  $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4] dx$ , si calcoli:  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$ . Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

### PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni  $f$  e  $g$  definite, per tutti gli  $x$  reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$$

1. Si studino le funzioni  $f$  e  $g$  e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ . Si considerino i punti del grafico di  $g$  a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo  $[-10; 10]$  e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione  $R$  delimitata dai grafici di  $f$  e di  $g$  sull'intervallo  $[0; 4]$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di  $R$  con le rette  $y = -15$  e  $y = -5$ , l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di  $10^{-1}$ ).
4. In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$ , la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da  $h(x) = 5 - x$ . Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?



# Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

## Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

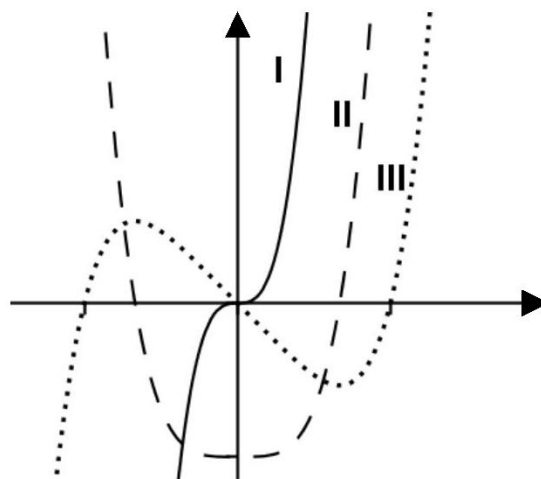
**Tema di:** MATEMATICA

### QUESTIONARIO

- Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perchè per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
- Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate (4; 0).
- Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0, \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .
- Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .
- In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme  $N$  dei numeri naturali ( "i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
- Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
- Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
- In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è citato così spesso?
- Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
- Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .  
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	$f$	$f'$	$f''$
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.



Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.