

**ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA – SCIENTIFICO BROCCA**  
**Sessione 2002**  
**SECONDA PROVA SCRITTA**  
**Tema di MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x,y)$  è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b \log x}{x}$$

ove  $\log x$  denota il logaritmo naturale di  $x$  e  $a$  e  $b$  sono numeri reali non nulli.

- a) Si trovino i valori di  $a$  e  $b$  per i quali il grafico  $G$  della funzione passa per i punti  $(e^{-1}, 0)$  e  $(e^2, 3e^{-2})$   
b) si studi e si disegni  $G$ ;  
c) si determini l'equazione della curva  $G'$  simmetrica di  $G$  rispetto alla retta  $y=y(1)$  ;  
d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per  $1 \leq x \leq 2$ , da  $G$  e da  $G'$ ;  
e) si disegnino, per i valori di  $a$  e  $b$  trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b \log |x|}{|x|} \quad y = \left| \frac{a + b \log x}{x} \right|$$

**PROBLEMA 2**

E' data la sfera  $S$  di centro  $O$  e raggio  $r$ . Determinare:

- a) il cono  $C$  di volume minimo circoscritto a  $S$ ;  
b) il cono  $C'$  di volume massimo inscritto in  $S$ ;  
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di  $C$  e  $C'$ , posto  $r = 1$  metro;  
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono  $C$ ;  
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono  $C$  applicando uno dei metodi numerici studiati.

**QUESTIONARIO**

- Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).
- Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3. Calcolare la derivata rispetto a  $x$  della funzione

$$\int_x^b f(t) dt$$

ove  $f(x)$  è una funzione continua.

4. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4}$$

5. Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di  $e^x \sin x = 1$  c'è almeno una radice reale di  $e^x \cos x = -1$ .

6. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e  $x$ , provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7. Verificare che la funzione:

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(0)$ .

8. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x} dx$$

con un errore inferiore a  $10^{-4}$ .

9. Verificato che l'equazione  $\cos x - \log x = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10. Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra "concetto primitivo" e "assioma".

---

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.